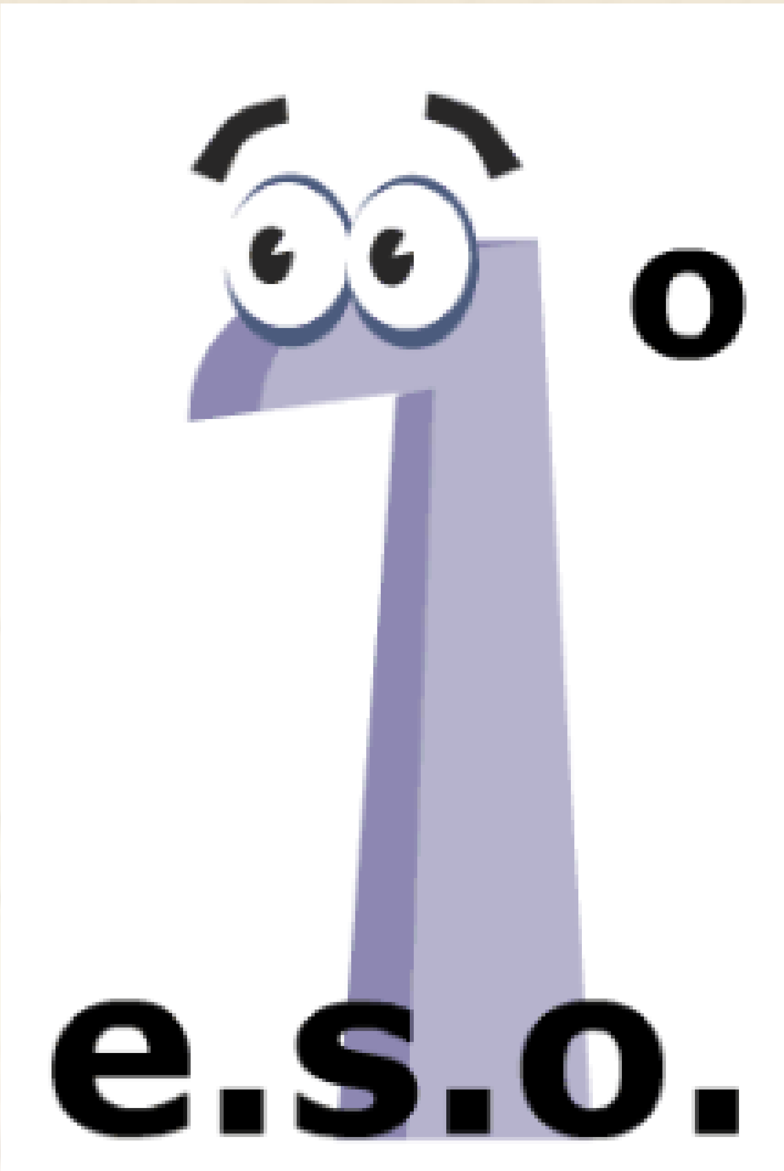
IES CARPE DIEM



matemáticas

1 Los números naturales

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Leer y escribir números mediante el sistema de numeración decimal.
- Utilizar los símbolos de desigualdad.
- Redondear números naturales.
- Realizar operaciones respetando la jerarquía.
- Calcular potencias y conocer sus propiedades.
- Calcular raíces cuadradas por tanteo.

Antes de empezar

El misterioso número 6174

Elige un número de cuatro cifras distintas.

1. Escribe el mayor número que se puede formar con las cuatro cifras.
2. Escribe el menor número que se puede formar con las cuatro cifras. Si hay ceros, se colocan al principio del número.
3. Resta los dos números anteriores.

Repite varias veces los tres pasos anteriores con el número obtenido en el tercer paso.

Siempre se llega a 6174 en menos de 7 veces. Lo descubrió *Kaprekar* y por eso este número lleva su nombre.

Investiga los números triangulares

El primer número triangular es 1.

El segundo número triangular es 1+2=3.

El tercer número triangular es 1+2+3=6

El décimo número triangular es 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55

¿Sabrías cuál es el centésimo número triangular? Es decir, cuánto vale 1+2+3+4+… y así sucesivamente hasta 100.

No se trata de usar una calculadora o un ordenador. Busca una manera de sumar estos números.

1. Los números naturales

Sistema de numeración decimal

El sistema de numeración decimal permite escribir cualquier número con diez símbolos:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9

Estos diez símbolos se llaman cifras o dígitos.

En un número, el valor de cada cifra depende de la posición que ocupa: unidades, decenas, centenas, unidades de mil o de millar, decenas de millar...

7 5 7 0 3

3 unidades	3
0 decenas	0
7 centenas	700
5 unidades de millar	5000
7 decenas de millar	70000
	75703

Lectura y escritura de números naturales

Primero se separan las cifras de tres en tres empezando por la derecha.

Después se leen de izquierda a derecha como si fuesen números de tres cifras.

Se añaden las palabras mil, millones, billones, trillones,... donde corresponda.

Hasta el número treinta siempre se escribe con una sola palabra.

$9_{2}013.098_{1}099.421$

nueve billones
trece mil
noventa y ocho millones
noventa y nueve mil
cuatrocientos veintiuno

Orden en los números

Dados dos números naturales cualesquiera se cumplirá una de las siguientes opciones:

- El primero es menor que el segundo
- El primero es igual que el segundo
- El primero es mayor que el segundo

menor que ..... <
igual que ..... =
mayor que ..... >

Se puede escribir:

7<13 o bien 13>7

Redondeo de un número

Es la sustitución, a partir de cierto lugar, de todas las cifras por ceros. Pero si la primera cifra que se sustituye es 5 o mayor que 5 se aumenta en uno la cifra anterior a la sustituida.

El número **7 261 459 803**

Redondeado a unidades de *millón* :

La cifra de los millones es 1, la cifra siguiente es un 4, menor que 5, luego el nº redondeado es:

7 261 000 000

Redondeado a *unidades de millar*:

La cifra de los millares es 9, la cifra siguiente es un 8, mayor que 5, luego el nº redondeado es:

7 261 460 000

EJERCICIOS resueltos

1. Subraya la cifra que te indican en los siguientes números:

a. Centenas en 126346
b. Decenas de millar en 33848590040
c. Unidades de millar de millón en 734623783774

Solución

a. 126$\underline{3}$46
b. 338485$\underline{9}$0040
c. 73$\underline{4}$623783774

2. Escribe con palabras los siguientes números:

a. 90917
b. 1200219
c. 29073000116
d. 10023456789

Solución

a. Noventa mil novecientos diecisiete.
b. Un millón doscientos mil doscientos diecinueve.
c. Veintinueve mil setenta y tres millones ciento dieciséis.
d. Diez mil veintitrés millones cuatrocientos cincuenta y seis mil setecientos ochenta y nueve.

3. Utiliza los símbolos < o > para las siguientes parejas de números:

a. 344 433
b. 553675 553756
c. 900900 9008990

Solución

a. 344 < 433
b. 553675 < 553756
c. 900900 < 9008990

4. Aproxima mediante redondeo:

a. 55344 a las centenas
b. 29999999 a las decenas de millar
c. 734545454847 a las unidades de millar de millón

Solución

a. 55300
b. 30000000
c. 735000000000

2. Operaciones

Suma

Los números que se suman se llaman **sumandos**. Un paréntesis indica la suma que se realiza primero.

La suma de números naturales tiene las siguientes **propiedades**:

- **Conmutativa**: La alteración del orden de los sumandos no altera la suma.
  a+b=b+a
- **Asociativa**: Se pueden asociar de cualquier modo los sumandos sin alterar la suma.
  a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c).

$777+560=1337$

Sumando
Sumando
Suma

Propiedad conmutativa:
777+560=560+777
Propiedad asociativa:
(777+560)+123=777+(560+123)

Resta

Los números que intervienen en una resta se llaman **minuendo**, **sustraendo** y **diferencia**:

Minuendo−Sustraendo=Diferencia

$377-150=227$

Minuendo
Sustraendo
Diferencia

Multiplicación

La multiplicación de un número a, mayor que 1, por otro b es la suma de a sumandos iguales al número b. Se expresa **axb** o **a·b**; a y b se llaman **factores**.

Propiedades

- **Conmutativa**: a·b=b·a
- **Asociativa**: (a·b)·c=a·(b·c)=a·b·c

$18\cdot 60=1080$

Factor
Factor
Producto

Propiedad conmutativa:
18·60=60·18
Propiedad asociativa:
(18·60)·10=18·(60·10)

División

La división es la operación contraria a la multiplicación y se expresa **a:b** o **a/b**.

a:b=c significa que **a=b·c**;

a es el **dividendo**, b el **divisor** y c el **cociente**.

Muchas veces la división no es exacta. Por ejemplo, 45:8 no es una división exacta porque 8·5=40 y 8·6=48; entonces 45 entre 8 tiene de cociente 5 y de resto 45−40=5.

$$\begin{array}{r|l} 18 & 6 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

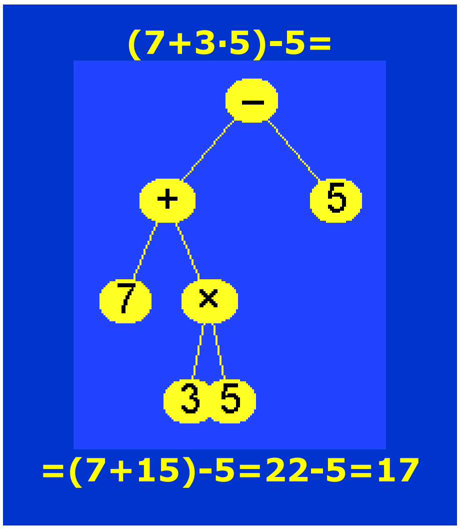
División exacta

Dividendo=divisor · cociente
18 = 6 · 3

$$\begin{array}{r|l} 45 & 8 \\ \hline 5 & 5 \end{array}$$

División entera

Dividendo=divisor · cociente + resto
45 = 8 · 5 + 5



Jerarquía de las operaciones

El orden para realizar operaciones es:

1) Operaciones entre paréntesis
2) Multiplicaciones y divisiones
3) Sumas y restas

Si solo hay multiplicaciones y divisiones o solo hay sumas y restas, se realizan de izquierda a derecha.

Otras propiedades

- Elemento neutro para la suma: 0. 0+a=a
- Elemento neutro para el producto: 1. 1·a=a
- Propiedad distributiva: a·(b+c)=a·b+a·c
- 0·a=0

EJERCICIOS resueltos

5. Cálculo mental:

a) 23+6=	b) 57+8=	c) 39+4=	d) 54+9=	e) 76+5=	f) 88+7=
g) 76-4=	h) 52-5=	i) 66-8=	j) 94-9=	k) 25-7=	l) 44-6=
m) 3·9=	n) 6·8=	ñ) 7·7=	o) 9·6=	p) 6·7=	q) 8·8=
r) 35:5=	s) 63:9=	t) 18:6=	u) 32:4=	v) 56:8=	w) 42:7=

Solución

a) 29	b) 65	c) 43	d) 63	e) 81	f) 95
g) 72	h) 47	i) 58	j) 85	k) 18	l) 38
m) 27	n) 48	ñ) 49	o) 54	p) 42	q) 64
r) 7	s) 7	t) 3	u) 8	v) 7	w) 6

6. Calcula:

a) (6+3)·5= b) (7+6)·3=
c) 3+3·3= d) 6+4·8=
e) 2·8+3·5= f) 6·7+8·5=
g) 9+0= h) 8·1= i) 7·0=

Solución
a) 9·5=45 b) 13·3=39 c) 3+9=12 d) 6+32=38
e) 16+15=31 f) 42+40=82 g) 9 h) 8 i) 0

7. Calcula usando la propiedad distributiva:

a) (4+5)·6= b) (3+8)·8= c) (8+2)·6=

Solución
a) 4·6+5·6=24+30=54 b) 3·8+8·8=24+64=88 c) 8·6+2·6=48+12=60

8. Expresa como un producto:

a) 4·7+5·7= b) 3·9+5·9= c) 6·7+4·7=

Solución
a) (4+5)·7=9·7 b) (3+5)·9=8·9 c) (6+4)·7=10·7

9. Simplifica y calcula:

a) $\dfrac{14 \cdot 2}{2 \cdot 2}$ b) $\dfrac{56 \cdot 5}{5 \cdot 7}$ c) $\dfrac{36 \cdot 8}{8 \cdot 4}$

Solución

a) $\dfrac{14 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 2} = \dfrac{14}{2} = 7$ b) $\dfrac{56 \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot 7} = \dfrac{56}{7} = 8$ c) $\dfrac{36 \cdot \cancel{8}}{\cancel{8} \cdot 4} = \dfrac{36}{4} = 9$

3. Potencias

Potencias de base y exponente natural

Una **potencia** es una manera abreviada de expresar una multiplicación de factores iguales.

Por ejemplo, 2^4 es una potencia. Se lee "dos elevado a cuatro" y significa 2·2·2·2. La **base** es 2, que es el factor que se repite. El **exponente** es 4, que es el número de veces que se repite la base.

Observa que las potencias más sencillas son las que tienen como base 1 ó 10.

No se debe confundir 2^4 y 2·4.

$2^4=2\cdot2\cdot2\cdot2=16$ $\qquad$ $2\cdot4=2+2+2+2=8$

$24\cdot24\cdot24\cdot24\cdot24\cdot24\cdot24\cdot24\cdot24=24^9$

$$\mathbf{24^9 = 264180754 0224}$$

$1^5=1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1=1$
$1^{10}=1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1=1$
$10^3=10\cdot10\cdot10=1000$
$10^5=10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=100000$

Propiedades de las potencias

Ejemplos:

- Producto con la misma base: $\mathbf{a^m\cdot a^n=a^{m+n}}$

Al multiplicar potencias de la misma base, se deja la misma base y se suman los exponentes

$6^3\cdot6^5=6^{3+5}=6^8$

- Cociente con la misma base: $\mathbf{a^m:a^n=a^{m-n}}$

Al multiplicar potencias de la misma base, se deja la misma base y se suman los exponentes

$5^8:5^2=5^{8-2}=5^6$

- Potencia de una potencia: $\mathbf{(a^m)^n=a^{m\cdot n}}$

La potencia de una potencia es otra potencia con la misma base y se multiplican los exponentes

$(4^5)^3=4^{5\cdot3}=4^{15}$

- Producto y el mismo exponente: $\mathbf{a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n}$

El producto de potencias con el mismo exponente, es otra potencia con las bases multiplicadas y el mismo exponente

$6^3\cdot2^3=(6\cdot2)^3=12^3$

- Cociente y el mismo exponente: $\mathbf{a^n:b^n=(a:b)^n}$

El cociente de potencias con el mismo exponente, es otra potencia de base el cociente de las bases y el mismo exponente

$9^5:3^5=(9:3)^5=3^5$

- Exponente 0: $\mathbf{a^0=1}$

Una potencia de exponente 0 vale 1, excepto si la base es 0

$7^0=1$

- Exponente 1: $\mathbf{a^1=a}$

Una potencia de exponente 1 es igual a la base

$8^1=8$

EJERCICIOS resueltos

11. Expresa con una única potencia:

a) $8^2 \cdot 8^5=$ b) $7^7 \cdot 7^9=$ c) $12^6 \cdot 12^8=$ d) $23^{19} \cdot 23^{16}=$

Solución
a) $8^{2+5}=8^7$ b) $7^{7+9}=7^{16}$
c) $12^{6+8}=12^{14}$ d) $23^{19+16}=23^{35}$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

12. Expresa con una única potencia:

a) $5^7:5^3=$ b) $9^6:9^2=$ c) $13^{10}:13^5=$ d) $22^{18}:22^6=$

Solución
a) $5^{7-3}=5^4$ b) $9^{6-2}=9^4$
c) $13^{10-5}=13^5$ d) $22^{18-6}=22^{12}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

13. Expresa con una única potencia:

a) $(4^6)^2=$ b) $(2^6)^8=$ c) $(10^{10})^4=$ d) $(26^{18})^5=$

Solución
a) $4^{6 \cdot 2}=4^{12}$ b) $2^{6 \cdot 8}=2^{48}$
c) $10^{10 \cdot 4}=10^{40}$ d) $26^{18 \cdot 5}=26^{90}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

14. Expresa con una única potencia:

a) $3^6 \cdot 4^6=$ b) $8^7 \cdot 6^7=$ c) $10^9 \cdot 12^9=$ d) $20^{14} \cdot 12^{14}=$

Solución
a) $(3 \cdot 4)^6=12^6$ b) $(8 \cdot 6)^7=48^7$
c) $(10 \cdot 12)^9=120^9$ d) $(20 \cdot 12)^{14}=240^{14}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

15. Expresa con una única potencia:

a) $8^5:4^5=$ b) $12^7:3^7$ c) $48^9:8^9=$ d) $77^{13}:11^{13}$

Solución
a) $(8:4)^5=2^5$ b) $(12:3)^7=4^7$
c) $(48:8)^9=6^9$ d) $(77:11)^{13}=7^{11}$

$a^n : b^n = (a:b)^n$

16. Calcula:

a) $7^0=$ b) $8^1=$ c) 47^0 d) $123^1=$

Solución
a) 1 b) 8
c) 1 d) 123

$a^0 = 1$

$a^1 = a$

17. Calcula:

a) $1^8=$ b) $10^4=$ c) 1^{83} d) $10^9=$

Solución
a) 1 b) 10000
c) 1 d) 1000000000

$1^n = 1$

10^n = un 1 y n ceros

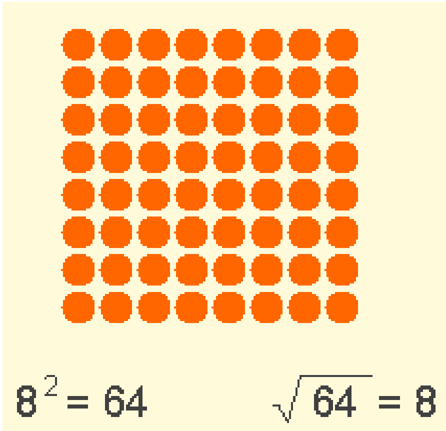
4. Raíces cuadradas

Raíz cuadrada exacta

La **raíz cuadrada** es la operación contraria a elevar al cuadrado. Por ejemplo, la raíz cuadrada de 64 es 8 porque $8^2=64$ y se escribe $\sqrt{64}=8$.

El símbolo $\sqrt{\ }$ se llama **radical** y el número que está dentro del radical es el **radicando**.

Si un número se eleva al cuadrado se obtiene un **número cuadrado**. Los números cuadrados tienen una raíz cuadrada exacta.



Raíz cuadrada entera

Muchos números no tienen raíz cuadrada exacta. En tal caso se calcula la raíz cuadrada entera y habrá un resto.

Por ejemplo, 70 no tiene raíz cuadrada exacta porque $8^2=64$ y $9^2=81$. La raíz cuadrada entera de 70 es 8 y el resto es $70-64=6$. $\sqrt{70}=8$ y resto 6.

Para hacer raíces cuadradas por tanteo buscaremos números que al elevarlos al cuadrado se aproximen al radicando.

EJERCICIOS resueltos

18. Calcula:

a) $\sqrt{81}$ b) $\sqrt{625}$ c) $\sqrt{3600}$

Solución

a) 9 porque $9^2=81$
b) 25 porque $25^2=625$
c) 60 porque $60^2=3600$

19. Calcula:

a) $\sqrt{43}$ b) $\sqrt{777}$ c) $\sqrt{2000}$

Solución

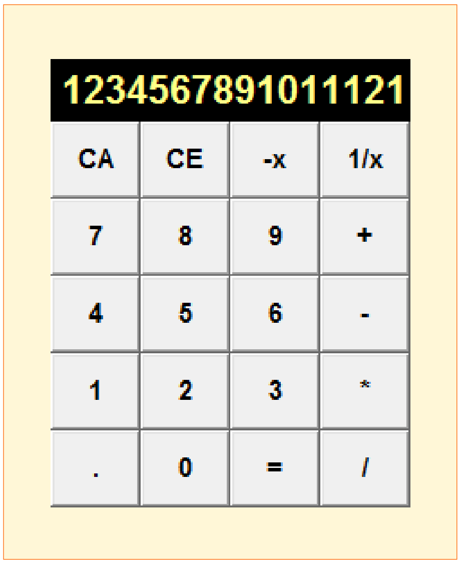
a) $6^2=36$ y $7^2=49$. Además $43-36=7$. $\sqrt{43}=6$ y resto 7

b) $25^2=625$ y $30^2=900$. Luego $\sqrt{777}$ está entre 25 y 30.
$27\cdot27=729$
$28\cdot28=784$. La raíz es 27.
$777-729=48$ $\sqrt{777}=27$ y resto 48

c) $40^2=1600$ y $50^2=2500$.
Luego $\sqrt{2000}$ está entre 40 y 50.
$45\cdot45=2025$, $44\cdot44=1936$. La raíz es 44.
$2000-1936=64$ $\sqrt{2000}=44$ y resto 64

Tabla para raíces cuadradas

1·1=1	20·20=400
2·2=4	25·25=625
3·3=9	30·30=900
4·4=16	40·40=1600
5·5=25	50·50=2500
6·6=36	60·60=3600
7·7=49	70·70=4900
8·8=64	80·80=6400
9·9=81	90·90=8100
10·10=100	100·100=10000
11·11=121	
12·12=144	
13·13=169	
14·14=196	
15·15=225	



5. La calculadora

Estándar o básica

Su principal característica es que las operaciones se realizan en el mismo orden en que se introducen. Por ejemplo, sabemos que 4+6·5=34 y si necesitamos hacer estas operaciones con esta calculadora tendremos que teclear 6 · 5 + 4.

- La tecla CA borra todo lo que se haya introducido y la tecla CE borra sólo lo que está en el visor sin borrar la operación iniciada.
- La tecla * es para multiplicar y la tecla / es para dividir.

Observa también cuántas cifras admite para un número. La de la imagen admite 13 cifras pero si pones más cifras redondea el número.

Científica

Su principal característica es que las operaciones se realizan respetando la jerarquía de las operaciones. Además muchas teclas sirven para realizar dos o más acciones. Para activar esa segunda acción hay que pulsar primero otra tecla (SHIFT o una tecla de cierto color). En esta calculadora basta pulsar encima. Además, en unas calculadoras primero se pulsa el número y después la acción (como en ésta), y en otras primero la acción y después el número.

- La tecla √ sirve para hacer raíces cuadradas y la tecla x^2 para elevar al cuadrado.
- La tecla AC borra todo lo que se haya introducido y la tecla SAC borra lo que está en la memoria.
- La tecla x^y sirve para hacer potencias y la tecla EXP indica en cuántos ceros acaba el número. Por ejemplo, si tecleas 8 EXP 3 = aparecerá 8000; o si ves 34EXP10 significa 340000000000

EJERCICIOS resueltos

20. Dile a un amigo: "Mi calculadora está loca. Si escribo 123456789 y pulso la tecla +, el último 9 se coloca al principio".

Antes de comprobarlo, sin que te vean, haz lo siguiente:

1) Pulsa la tecla CA
2) Teclea 788888889 (un siete, siete ochos y un nueve)
3) Pulsa +
4) Pulsa 0
5) Pulsa la tecla CE

Ya está lista la calculadora: cuando alguien escriba 123456789 y pulse + aparecerá en pantalla 912345678. ¿Sabes el porqué?

El experimento no se puede volver a repetir a no ser que vuelvas a prepararla con los 5 pasos anteriores.

Solución

En el paso 1, se borró todo en la calculadora. En los pasos 2, 3 y 4 había introducido 7888888889+0. En el paso 5 se borra el cero pero está preparada para hacer una suma. 7888888889+123456789=912345678.

Para practicar

1. En un partido de baloncesto, un jugador de 2,05 m de altura, ha encestado 12 canastas de dos puntos y 5 de tres puntos. ¿Cuántos puntos anotó?

2. En el número 611, se cambia la cifra de las decenas por un 7, y se obtiene un nuevo número. ¿Cuál es la diferencia entre estos dos números?

3. Mi padre tiene 36 años, mi madre 34 y yo 12. ¿Cuántos años tendrá mi madre cuando yo tenga 21 años?

4. Ana es menos alta que Lucía y más que Alicia. ¿Quién es la más alta de las tres?

5. Al restar de 91 un número se obtiene otro formado por dos cuatros. ¿Cuál fue el número restado?

6. En mi casa hay 3 habitaciones. En cada habitación están 4 amigos y 2 gatos. Cada amigo tiene 5 €. ¿Cuántos euros tienen mis amigos?

7. Mi hermano tiene 38 € y yo tengo 45. El precio de cada disco es 7 €. ¿Cuántos discos puedo comprar, como máximo, con mi dinero?

8. Pepe tiene 37 años y conduce un autobús en el que están 11 viajeros. En la primera parada bajan 5 personas y suben 4. En la siguiente parada suben 8 y bajan 3. Con estas dos paradas, ¿cuántos viajeros están en el autobús?

9. Calcula:

a) 255+45·5=

b) 215+40:5=

c) 90-12·6=

10. Calcula:

a) 18·6-45:3+18=

b) 24·9+33:3-27=

c) 14·18-48:2-6=

11. Calcula:

a) 28·(24-16)·2=

b) 488·(88+32):8=

c) 87·(39-12):3=

12. Calcula:

a) 16+6·(6+16·2)=

b) 240+24·(48+40·8)=

c) 60+12·(28-20:4)=

13. Escribe con una única potencia:

a) $7^8 \cdot 7^2=$

b) $5^{12}:5^6=$

c) $(2^7)^3=$

d) $9^5 \cdot 9^{11}=$

e) $8^9:8^3=$

f) $(3^{10})^4=$

14. Escribe con una única potencia:

a) $2^7 \cdot 5^7=$

b) $10^6:5^6=$

c) $6^5 \cdot 5^5=$

d) $9^8:3^8=$

15. Calcula:

a) $14^0=$

b) $6^1=$

c) $1^{10}=$

d) $10^6=$

16. Expresa los siguientes números como suma de potencias de 10:

a) 3456

b) 1089

Para saber más

0	1	2	3	4	5	6	7
T	R	W	A	G	M	Y	F

8	9	10	11	12	13	14	15
P	D	X	B	N	J	Z	S

16	17	14	18	19	20	21
Q	V	Z	H	L	C	K

La letra del DNI

El Documento Nacional de Identidad (DNI) o carné de identidad está formado por un número de 8 cifras como máximo y una letra de control. Esta letra se calcula de la siguiente forma:

1) Se divide el número entre 23 para saber el resto de la división.

2) El resto indica la letra según la tabla de la izquierda.

$$(2+3)^2=5^2=25$$
$$2^2+3^2=4+9=13$$

$$\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$
$$\sqrt{9}+\sqrt{16}=\sqrt{25}=5$$

Cuidado...

Con las sumas y restas de potencias o raíces:

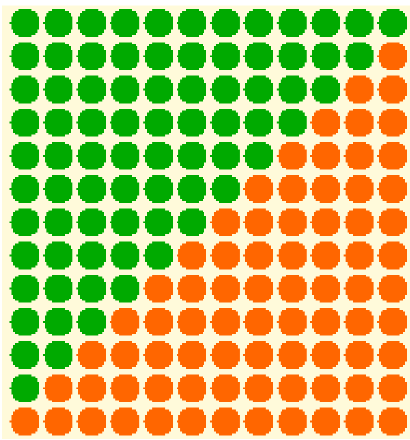
- $\mathbf{(a+b)^2 \neq a^2+b^2}$
- $\sqrt{\mathbf{a}+\mathbf{b}} \neq \sqrt{\mathbf{a}}+\sqrt{\mathbf{b}}$

Observa que lo anterior sería cierto si se cambia la suma por una multiplicación o una división.

El sistema de numeración

El sistema de numeración decimal, o sistema indoarábigo, tiene su origen en la India y, por los documentos que se conocen, se introdujo en Europa a través de los árabes durante la invasión de la península Ibérica.

El primer documento conocido en el que aparecen escritas las cifras indoarábigas es el Códice Vigilanus, del siglo X (año 976). Su autor es el monje Vigila del monasterio de San Martín en Albelda (La Rioja).



12 + 1

12

El nº de puntos naranjas es el mismo que el de puntos verdes. Todos ellos forman un rectángulo

Números triangulares

Los números triangulares son:

1
1+2=3
1+2+3=6
1+2+3+4=10
1+2+3+4+5=15
1+2+3+4+5+6=21
1+2+3+4+5+6+7=28

Observa la figura:

Si necesito saber 1+2+3+4+...+11+12 coloco esta cantidad de puntos naranjas y los mismos de puntos verdes como en la figura. Todos ellos forman un rectángulo de lados 12 y 13 luego hay 12·13=156 puntos en total. Y la mitad de cada color:

1+2+3+4+...+11+12=(12·13):2=68

Siguiendo la misma idea:

1+2+3+4+...+86+87=(87·88):2=3828

Recuerda lo más importante

Números naturales

- Hay diez cifras o dígitos para formar los números. Cada cifra tiene un valor dependiendo de la posición que ocupe (en el número 3588, la cifra 5 vale 500).
- Los números están ordenados y se usa el símbolo < para *menor que* y > para *mayor que*.
- Redondear un número es sustituir sus últimas cifras por ceros pero observando la primera cifra que se sustituye por si hay que añadir una unidad a la cifra anterior.

Operaciones

- En la **suma** hay sumandos; en la **resta** está el minuendo y el sustraendo, y el primero tiene que ser mayor que el segundo; en la **multiplicación** hay factores; en la **división** se cumplirá:

  dividendo = divisor · cociente + resto   (resto<divisor)

  y si el resto es cero la división es exacta.

dividendo	divisor
resto	cociente

- Cuando se realicen operaciones combinadas, primero se hacen los paréntesis, después los productos y divisiones, y lo último son las sumas y restas.

Potencias

- Una **potencia** es una multiplicación de factores iguales. El factor que se repite es la base y el exponente es el nº de veces que se repite la base.

  $\text{base}^{\text{exponente}}$

  Propiedades:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$
$a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$	$a^n : b^n = (a:b)^n$	$a^0 = 1$
$a^1 = a$	$1^n = 1$	10^n = un 1 y n ceros

Raíz cuadrada

- $\sqrt{a} = b$ si $a^2=b$ (a es el radicando y b es la raíz cuadrada).

  Si no hay raíz exacta, elegimos el mayor número b tal que $b^2<a$, y habrá un resto$=a-b^2$.

Usar la calculadora

Antes de usar una calculadora debes saber si es científica (respeta la jerarquía de las operaciones) o estándar (realiza las operaciones en el orden en que se introducen).

Autoevaluación

1. Escribe con palabras, en femenino y con minúsculas el número 50924.

2. Escribe el nº que se corresponde con 25 millares 48 centenas 32 decenas y 27 unidades.

3. Redondea a las decenas de millar la superficie de España que es de 504782 km^2.

4. Escribe el número 5083 como suma de potencias de 10.

5. Efectúa 9·3+6·(9-5+9)

6. Efectúa 10+8·7-(6-10:5)

7. Escribe como una sola potencia: $(7^2 \cdot 7^4):7^3$

8. Escribe como una sola potencia: $(5^7)^3 \cdot 5$

9. Completa $\sqrt{\square} = 23$

10. David compra 17 paquetes de cromos y en cada uno hay 7 cromos. Separa los que no tiene que son 40 y el resto los reparte, a partes iguales, entre sus 4 primos. ¿Cuántos cromos recibe cada primo?

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. 39
2. 60
3. 43 años
4. Lucía (Lucía>Ana>Alicia)
5. 47
6. 60 €
7. 6 discos
8. 15 viajeros
9. a) 480
   b) 223
   c) 18
10. a) 111
    b) 200
    c) 222
11. a) 448
    b) 7320
    c) 783
12. a) 244
    b) 9072
    c) 336
13. a) 7^{10}
    b) 5^6
    c) 2^{21}
    d) 9^{16}
    e) 8^6
    f) 3^{40}
14. a) 10^7
    b) 2^6
    c) 30^5
    d) 3^8
15. a) 1
    b) 6
    c) 1
    d) 1000000
16. a) $3 \cdot 10^3+4 \cdot 10^2+5 \cdot 10+6$
    b) $1 \cdot 10^3+0 \cdot 10^2+8 \cdot 10+9$

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. cincuenta mil novecientas veinticuatro
2. 30147
3. 500000 km^2
4. $5 \cdot 10^3+0 \cdot 10^2+8 \cdot 10+3$
5. 105
6. 62
7. 7^3
8. 5^{22}
9. 529
10. 19 cromos (y sobran 3)

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

2

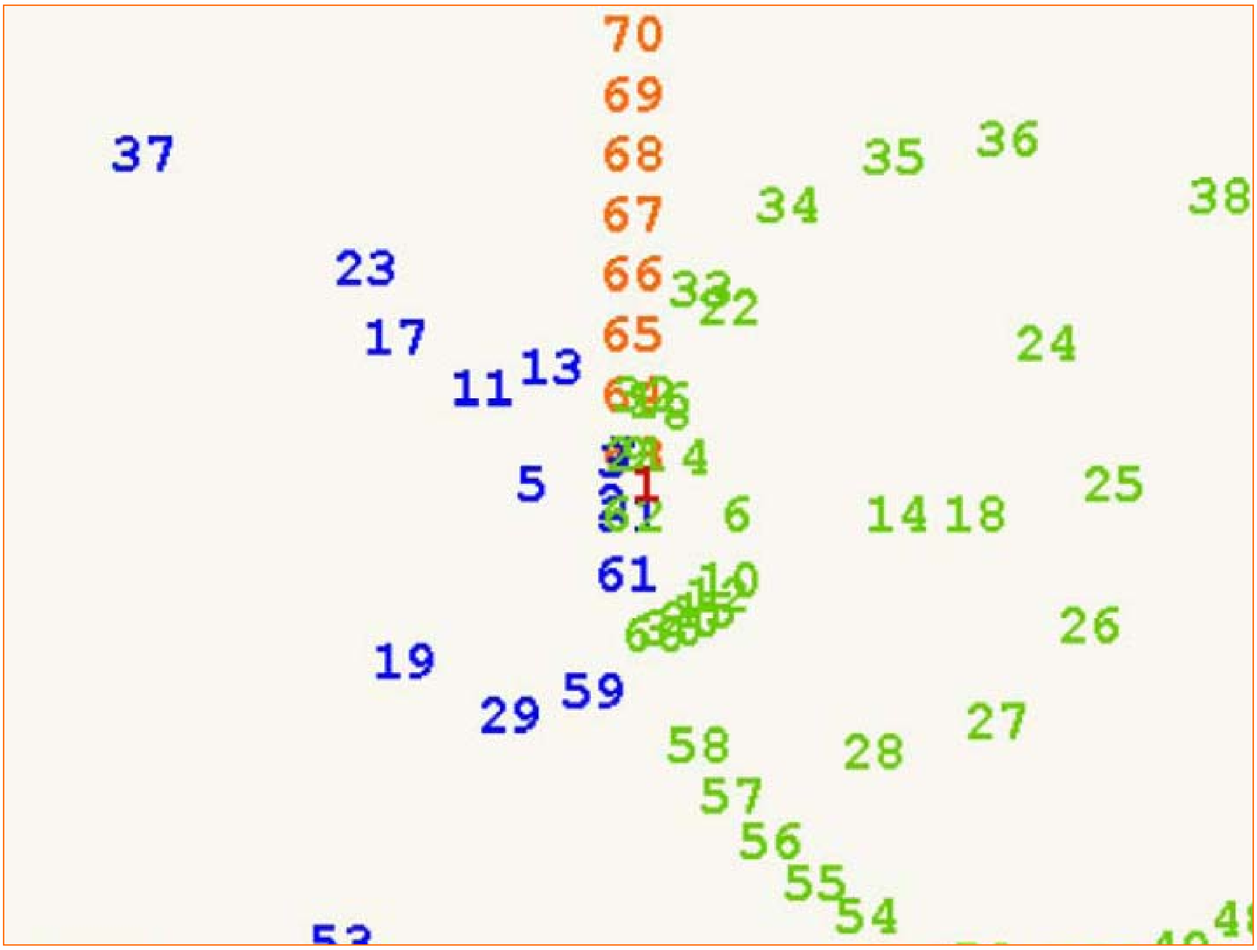
Múltiplos y divisores

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Saber si un número es múltiplo de otro.
- Reconocer las divisiones exactas.
- Hallar todos los divisores de un número.
- Reconocer los números primos.
- Descomponer un número en sus factores primos.
- Hallar el mínimo común múltiplo de varios números.
- Hallar el máximo común divisor de varios números.
- Resolver problemas sencillos aplicando estos conocimientos.

Antes de empezar



Esta cascada de números se transforma después en un baile. Los números que bajan, al llegar al centro comienzan un movimiento circular, cada número según su valor, de manera que, al completar un ciclo, un número se encuentra con un múltiplo suyo. Según ello podemos distinguir cuatro clases de números:

- El número 0, que sigue su camino recto, ajeno a todo, y desaparece.
- El número 1, que incide sobre cada número de los que bajan.
- Los números que al llegar al centro coinciden solamente con el número 1. Hacen sus ciclos por la izquierda. Son los números primos.
- Los números que, al llegar al centro coinciden con algún otro número además del 1, hacen sus ciclos por la derecha. Son los números compuestos.

1. Múltiplos y divisores

Los múltiplos de un número

Los múltiplos de un número natural son los números naturales que resultan de multiplicar ese número por otros números naturales.

Decimos que un número es **múltiplo** de otro si lo contiene un número entero de veces.

- El número 0 solamente tiene un múltiplo, que es el 0. Los demás números naturales tienen infinito número de múltiplos.
- El número 0 es múltiplo de todos los números.
- Todos los números son múltiplos de 1.

Los 50 primeros múltiplos de 7:

0	7	14	21	28
35	42	49	56	63
70	77	84	91	98
105	112	119	126	133
140	147	154	161	168
175	182	189	196	203
210	217	224	231	238
245	252	259	266	273
280	287	294	301	308
315	322	329	336	343

La división exacta de números naturales

Al dividir dos números naturales puede suceder que su resto sea 0, eso es porque el dividendo es **múltiplo** del divisor, decimos que es una división exacta.

Si el resto es otro número mayor que 0 la división no es exacta. El dividendo no es múltiplo del divisor. División exacta es la que tiene de resto 0.

$$\begin{array}{r|l} 42 & 7 \\ \hline 0 & 6 \end{array}$$

División exacta, 42 es múltiplo de 7

$$\begin{array}{r|l} 39 & 8 \\ \hline 7 & 4 \end{array}$$

La división no es exacta, 39 no es múltiplo de 8

Los divisores de un número

Los divisores de un número natural son los números naturales que le pueden dividir, resultando de cociente otro número natural y de resto 0.

Ser divisor es lo recíproco a ser múltiplo. Si 9 es múltiplo de 3, entonces 3 es divisor de 9.

Un número a es **divisor** de un número b si la división de b entre a, es exacta.

Cada número tiene una cantidad concreta de divisores. A la derecha puedes ver algunos ejemplos.

- Solamente el 0 tiene infinito número de divisores, ya que todos los números son divisores de 0. El número 1 tiene solamente un divisor. El 0 y el 1 son números especiales.

Los divisores de **60** son:

1	2	3	4
5	6	10	12
15	20	30	60

tiene 12 divisores

Los divisores de **24** son:

1	2	3	4
6	8	12	24

tiene 8 divisores

Los divisores de **73** son:

1 73

Sólo tiene 2 divisores, el 1 y él mismo

El número **1650**
- Acaba en 0, es múltiplo de **2**
- Sus cifras suman 1+6+5+0=12, es múltiplo de **3**
- Acaba en 0, es múltiplo de **5**
- También es múltiplo de **10**
- 1+5=6, 6+0=6, y 6-6=0 es múltiplo de **11**

El número **49275**
- 4+9+2+7+5=27, es múltiplo de **3** y también de **9**.
- Acaba en 5, es múltiplo de **5**

Criterios de divisibilidad

Podemos saber fácilmente si un número es divisible por otro sin necesidad de hacer la división, observando estas características:

- Los múltiplos de 2 terminan en 0, 2, 4, 6, 8.
- En los múltiplos de 3 si sumamos el valor individual de sus cifras resulta también un múltiplo de 3.
- Los múltiplos de 5 terminan en 0 ó 5.
- En los múltiplos de 9 si sumamos el valor individual de sus cifras resulta también un múltiplo de 9.
- Los múltiplos de 10 terminan en 0.
- En los múltiplos de 11 si sumamos los valores individuales de las cifras que están en posiciones par, aparte sumamos los valores individuales de las cifras que están en posiciones impar, restamos esas cantidades nos da un múltiplo de 11, el 0 también lo es.

EJERCICIOS resueltos

1. ¿Cuáles de los siguientes números son múltiplos de 6?

33, 54, 9, 88, 68, 6, 89, 53, 73, 77, 42, 3.

Solución: Son múltiplos 54, 6 y 42.

No son múltiplos 33, 9, 88, 68, 89, 53, 73, 77, y 3.

2. Busca los 9 divisores de 36.

Solución: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36.

3. ¿Cuáles de los siguientes números son divisores de 48?

4, 7, 6, 35, 10, 8, 24, 1, 3, 17, 21, 12.

Solución: Son divisores 4, 6, 8, 24, 1, 3, 12.

No son divisores 7, 35, 10, 17, 21.

4. ¿El número 74652, es divisible por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11?

Solución Es divisible por 2, 3, 4, y 6.

No es divisible por 5, 8, 9, 10 y 11.

2. Números primos y compuestos

Números primos y números compuestos

Al comprobar cuántos divisores tienen los números observamos que:

El 1 es el único número que solamente tiene un divisor, por eso es un número especial. El 0 tiene infinito número de divisores, ya que todos los números son divisores de 0, también es un número especial. Los demás números pueden ocurrir dos casos que tengan sólo 2 divisores, el 1 y el mismo número, o que tengan más.

- Los números **primos** son los que tienen dos divisores, que son el 1 y el mismo número primo.
- Los números **compuestos** son los que tienen más de dos divisores, son los más frecuentes.

601 es un nº primo.

602 es un nº compuesto, se puede vivir por 2.

603 es un nº compuesto, se puede dividir por 3.

604 es un nº compuesto, se puede dividir por 2.

605 es un nº compuesto, se puede dividir por 5.

606 es un nº compuesto, se puede dividir por 2 y por 3.

607 es un nº primo.

608 es un nº compuesto, se puede dividir por 2.

609 es un nº compuesto, se puede dividir por 3.

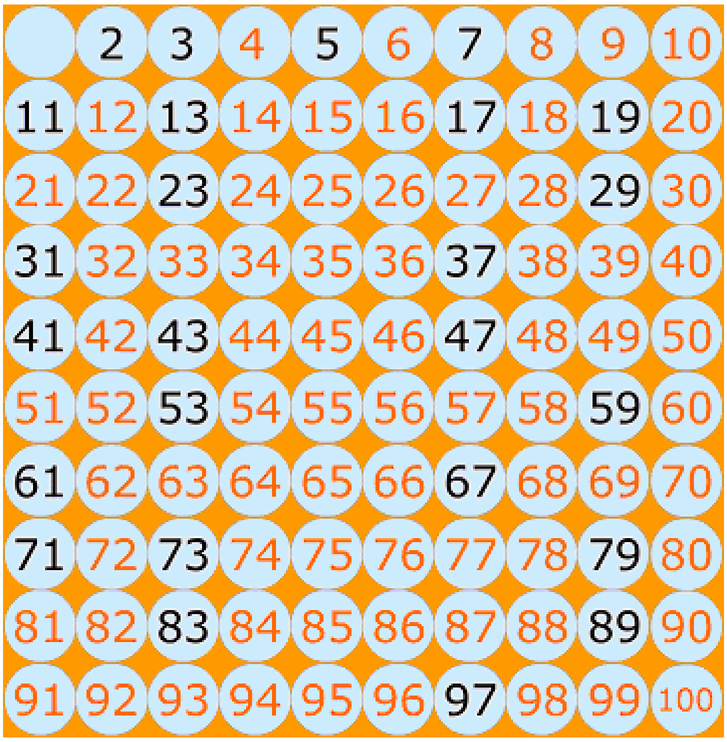
610 es un nº compuesto, se puede dividir por 2, 5 y 10.

611 es un nº compuesto, se puede dividir por 13.

Obtención de números primos

No existe un método directo para obtener sistemáticamente todos los números primos.

Para poder afirmar que un número es primo debemos comprobar que ese número no es múltiplo de los primos menores que él, nos basta comprobarlo con los menores que la raíz cuadrada.



La Criba de Eratóstenes es un procedimiento para obtener los primeros números primos.
Se colocan en un cuadro los números naturales a partir del número 2.

a) Comenzamos por el número 2, lo dejamos, pero a partir de él contamos de 2 en 2 y tachamos los números que sean múltiplos de 2.
b) El primer número de los que quedan es el 3, lo dejamos y desde el número 3 eliminamos, contando de 3 en 3, los números que sean múltiplos de 3.
c) El siguiente número de los que quedan es el 5, lo dejamos y desde el número 5 eliminamos los números que sean múltiplos de 5.
d) Así vamos avanzando, cuando llegamos a un número que no ha sido eliminado lo dejamos, pero a partir de él eliminamos los números que sean sus múltiplos. Así hasta el final. Habrán quedado solamente números primos.

En el recuadro puedes ver los números primos menores que 100.

Descomposición factorial de **220**

220 es divisible por 2
220:2 = 110 $220=2\cdot110$

1100 es divisible por 2
110:2 = 55 $220=2\cdot2\cdot55$

55 es divisible por 5
55:5=11 $220=2\cdot2\cdot5\cdot11$

11 es divisible por 11
11:11=1 $\mathbf{220=2\cdot2\cdot5\cdot11\cdot1}$

Se dispone así:

$$\begin{array}{rr|l} & 220 & 2 \\ 220:2 \rightarrow & 110 & 2 \\ 110:2 \rightarrow & 55 & 5 \\ 55:5 \rightarrow & 11 & 11 \\ 11:11 \rightarrow & 1 & \end{array}$$

$$\mathbf{220=2^2\cdot5\cdot11}$$

Descomposición factorial de un número

Descomponer un número en factores es ponerlo como producto de factores primos. Se procede de la manera siguiente:

- Dividimos el número por el primer número primo que podamos.
- El cociente que haya resultado lo colocamos bajo el número.
- Si podemos seguimos dividiendo sucesivamente ese cociente por el mismo número primo.
- Cuando no podamos hacer la división por ese número primo lo hacemos por el siguiente primo que se pueda.
- Así sucesivamente hasta que el cociente final sea 1.
- Finalmente ponemos ese número como un producto de potencias de factores primos.

EJERCICIOS resueltos

5. Indica si estos números son primos o compuestos.

76, 51, 23, 60, 72, 47, 36, 64, 21, 30, 53, 49.

Solución Son primos 23, 47 y 53.

Son compuestos 76, 51, 60, 72, 36, 64, 21, 30 y 49.

6. Descompón factorial del número 31164.

Solución: $31164= 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 53$.

7. Halla el mínimo común múltiplo de 6 y 8.

Descompuestos en factores son: $6= 2 \cdot 3$

$8= 2^3$

Solución: m.c.m.(6, 8)= 24

8. Halla el mínimo común múltiplo de 15, 9 y 10.

Descompuestos en factores son: $15= 3 \cdot 5$

$9= 3^2$

$10= 2 \cdot 5$

Solución: m.c.m.(15, 9, 10)= $2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$

3. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

Mínimo común múltiplo

El mínimo común múltiplo de varios números, a, b, c, etc., es el número más pequeño que es múltiplo de todos esos números, sin considerar el 0.

Se escribe m.c.m. (a, b, c, ...)

- EJEMPLO: m.c.m. de 12 y 30

Múltiplos de 12 → 12, 24, 36, 48, **60**, 72, 96, 108, 120, ...
Múltiplos de 30 → 30, **60**, 90, 120, 150, 180, 210, ...

Hay muchos más números que son a la vez múltiplos de 12 y de 30, pero el menor de todos es 60.

m.c.m (12,30)= **60**

Máximo común divisor

El máximo común divisor de varios números a, b, c, etc., es el número más grande que es divisor de todos esos números.

Se escribe m.c.d. (a, b, c, ...)

- EJEMPLO: m.c.d. de 12 y 30

Divisores de 12 → 1, 2, 3, 4, **6**, 12
Divisores de 30 → 1, 2, 3, 5, **6**, 10, 15, 30

1, 2, 3 y 6 son divisores de 12 y de 30, el mayor es el 6.

m.c.d (12,30)= **6**

Calcular el m.c.m y el m.c.d.

Comenzamos por descomponer los números en factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$12=2^2\cdot 3$ $\qquad 30=2\cdot 3\cdot 5$

m.c.m (12,30) = $2^2\cdot 3\cdot 5$ = 60

m.c.d (12,30) = $2\cdot 3$ = 6

- El **mínimo común múltiplo** de varios números es el producto de los factores **comunes y no comunes** elevados a su **mayor** exponente.
- El **máximo común divisor** de varios números es el producto los **factores comunes** elevados al exponente **menor**.

Los números que no tienen divisores comunes (salvo el 1), se llaman "primos entre sí". Por ejemplo el 72 y el 55, el 8 y el 9, el 15 y el 16.

EJERCICIOS resueltos

9. Halla el m.c.d. de 64 y 100

Descompuestos en factores son: $64 = 2^6$
$100 = 2^2 \cdot 5^2$

Solución m.c.d.(64, 100) = 2^2 = 4

10. Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de 15 y 18, después multiplícalos. Efectúa también el producto 15·18, ¿qué observas?

Solución: m.c.d.(15, 18)=3
m.c.m.(15, 18)=90
Su producto = 18 · 15 = 270
El producto de su m.c.d. por su m.c.m. = 3 · 90 = 270

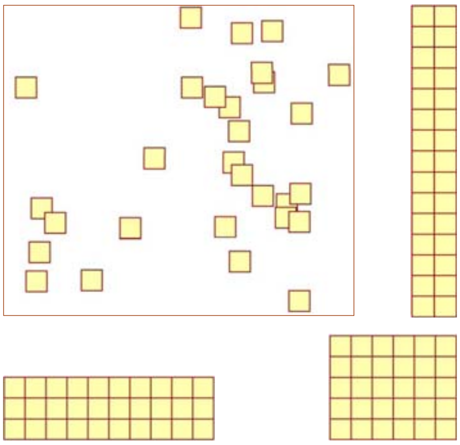
11. Los números 8 y 21 no tienen divisores comunes, son primos entre sí. ¿Cuál es su m.c.m.?.

Solución: Si no tienen factores comunes, su m.c.d. es 1.
Su m.c.m. es su producto = 8·21= 168

12. Busca dos números primos entre si cuyo producto sea 72.

Solución: Si no tienen factores comunes, su m.c.d. es 1.
Su m.c.m. es su producto = 8·9= 72

4. Problemas de aplicación



1) Tengo una colección de minerales, guardados cada uno en una cajita cuadrada, todas iguales. Deseo poner esas cajitas en exposición de manera que formen un rectángulo completo. ¿De cuántas maneras lo puedo hacer? ¿Cuál es la disposición que más se parece a un cuadrado?

✓ Los divisores de 30 son 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30

Puedo poner las cajitas en rectángulos de las siguientes maneras:

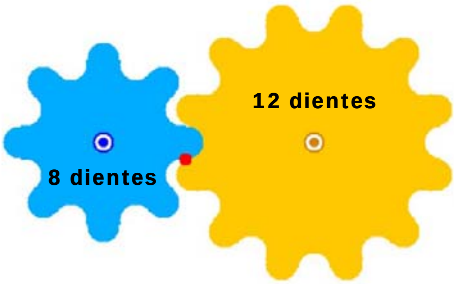
1x30 ó 30x1

2x15 ó 15x2

3x10 ó 10x3

5x6 ó 6x5 Cualquiera de estas dos disposiciones es la más “cuadrada”

2) Estas ruedas dentadas forman un engranaje. ¿Cuántos dientes de cada rueda deben pasar para que vuelvan a coincidir los puntos señalados en color rojo?. ¿Cuántas vueltas habrá dado cada una de las ruedas?



✓ La rueda azul tiene 8 dientes, la amarilla 12.

El número de dientes que deben pasar para que vuelvan a coincidir es un múltiplo de 8 y de 12, además el menor de los múltiplos comunes.

$8=2^3$ $12=2^2\cdot 3$ mc.m. $(8,12)=2^3\cdot 3=24$

Los puntos rojos volverán a coincidir cuando hayan pasado 24 dientes.

La rueda azul habrá girado 24:8 = 3 vueltas.

La rueda amarilla habrá girado 24:2 = 2 vueltas.

3) Tengo cuentas de colores para formar collares, hay 120 azules, 160 rojas y 200 blancas. Quiero montar collares lo más grandes que sea posible, cada collar con el mismo número de cuentas sin que sobren y sin mezclar colores. ¿Cuántas cuentas debo emplear en cada collar?. ¿Cuántos collares puedo hacer de cada color?.

✓ Si no pueden sobrar cuentas de ninguno de los tres colores, el número de cuentas que debo emplear es un divisor de 120, 160 y 200. Como además quiero hacerlos lo más grandes que se pueda será el m.c.d.

$120=2^3\cdot 3\cdot 5$ $160=2^5\cdot 5$ $200 = 2^3\cdot 5^2$

m.c.d. $(120,160,200)=2^3\cdot 5=40$

40 cuentas emplearé en cada collar

Puedo hacer 120:40=3 collares azules,

160:40=4 collares rojos,

200:40=5 collares blancos.

Para practicar

1. ¿Es 176 múltiplo de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 41?

   Aplica los criterios de divisibilidad o realiza la división para ver si el resto es 0.

   - Divisibilidad por 2 o por 5 que la última cifra lo sea.
   - Divisibilidad por 3 o por 9 que la suma de las cifras lo sea.

2. ¿Es 198 divisible por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 41?

3. Escribe los 10 primeros múltiplos de 8.

4. Escribe los múltiplos de 12 menores que 100.

5. La descomposición en factores primos de 15000 es $2^3 \cdot 3 \cdot 5^4$. ¿Cuántos divisores tiene?

   Para ello hacemos la descomposición en factores primos, aumentamos en uno a cada uno de los exponentes. El producto de esos exponentes aumentados es el número de divisores.

6. ¿Cuántos divisores tiene el número 810?

7. Halla los divisores de 6728

   $6728 = 2^3 \cdot 29^2$

   Calcula primero el número de divisores, resultará más fácil.

8. Halla los divisores de 147.

9. Decide razonadamente si 247 es primo o no.

   Los posibles primos que pueden dividir a 247 son los menores que $\sqrt{247}$ son 2, 3, 5, 7, 11, 13.

10. Decide razonadamente si 131 es primo o no.

11. Halla el mínimo común múltiplo de:

    a) 72, 60.

    b) 150, 90

    c) 9, 24, 6

    d) 36, 15, 4

    Es conveniente que primero hagas la descomposición factorial de esos números.

12. Halla el máximo común divisor de:

    a) 72, 24

    b) 56, 81

    c) 84, 108, 36

    d) 54, 60, 18

    Es conveniente que primero hagas la descomposición factorial de esos números.

¿M.c.d. o m.c.m.?

13. Ana viene a la biblioteca del instituto, abierta todos los días, incluso festivos, cada 4 días y Juan, cada 6 días. Si han coincidido hoy. ¿Dentro de cuántos días vuelven a coincidir?

14. María y Jorge tienen 30 bolas blancas, 27 azules y 42 rojas y quieren hacer el mayor número posible de hileras iguales. ¿Cuántas hileras pueden hacer?

15. Un ebanista quiere cortar una plancha de 10 dm de largo y 6 de ancho, en cuadrados lo más grandes posibles y cuyo lado sea un número entero de decímetros.
    ¿Cuál debe ser la longitud del lado?

16. La alarma de un reloj suena cada 9 minutos, otro cada 21 minutos. Si acaban de coincidir los tres dando la señal. ¿Cuánto tiempo pasará para que los tres vuelvan a coincidir?

Para saber más

¿Cuántos números primos hay?

¿En qué proporción están los números primos respecto al total de números naturales?

Los números primos son bastante frecuentes entre los primeros números naturales, pero conforme vamos a números grandes, escasean los números primos, ello nos podía hacer pensar que a partir de cierto número ya no haya más números primos.

Para resolver esta duda hagamos este razonamiento, que ya hicieron los antiguos griegos:

> Si la cantidad de números primos fuera concreta podríamos multiplicarlos todos ellos, obtendríamos el número m.
>
> El número m, lógicamente sería compuesto, pero el número que le sigue m+1 al ser dividido por cualquier número primo daría de resto 1 por tanto no sería múltiplo de ninguno de ellos, es decir sería primo.
>
> Luego siempre podemos obtener otro número primo más, o sea que el conjunto de números primos es ilimitado.

¿Cuál es el mayor número primo conocido?

Pues hasta la fecha, este que tiene nada menos que ¡12.978.189 de dígitos!, por lo que obviamente no se puede escribir aquí.

$$2^{43112609} - 1 =$$

316470269330255923 14...80022181166697152511

Fue descubierto el 23 de agosto de 2008 en la Universidad de California y su descubridor ganó el premio de 100.000 dólares, ofrecido por la EFF al primero que consiguiese un primo con más de 10.000.000 de dígitos. Hace el nº 46 de la lista de primos de Mersenne, aunque el nº 45 fue descubierto 2 semanas más tarde.

En la actualidad hay un premio de 150.000 dólares para el primero que consiga un nº primo con más de 100.000.000 de cifras, así que ¡ánimo!.

¿Qué es un número perfecto?

Se dice que un número es perfecto cuando es igual a la suma de sus divisores, excepto él mismo.

Los divisores de 6 son 1, 2, 3 y 6
1+2+3=6
El **6** es un nº perfecto.

Los divisores de 28 son 1, 2, 4, 7, 14, 28
1+2+4+7+14=28
28 también es perfecto.

El siguiente número perfecto es el **496**. ¿Te atreves a comprobarlo?. Después viene el 8128, el 33550336 y el 8589869056, fíjate que acaban en 6 o en 8.

Ya Euclides descubrió una fórmula para calcular números perfectos:

$6=2\cdot3=2^1\cdot(2^2-1)$
$28=4\cdot7=2^2\cdot(2^3-1)$
$496=16\cdot31=2^4\cdot(2^5-1)$
$8128=64\cdot127=2^6\cdot(2^7-1)$

Pero cuidado no se cumple para todas las potencias de 2 sino sólo cuando 2^n-1 es un número primo, un *¡primo de Mersenne!*.

Este número primo pertenece a los llamados primos de Mersenne, que son números primos de la forma

$$2^n-1$$

Deben su nombre a Marin Mersenne, fraile franciscano que en 1644, enunció que estos números eran primos para determinados valores de n. Así los números primos y los números perfectos están relacionados.

Recuerda lo más importante

- **Los múltiplos de un número** son los que resultan de multiplicar ese número por cualquier número natural.

  Ejemplo: múltiplos de 7={0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, ... }

- **Los divisores de un número** son aquellos que le pueden dividir, su división es exacta.

  Todos los números naturales son divisores de 0.

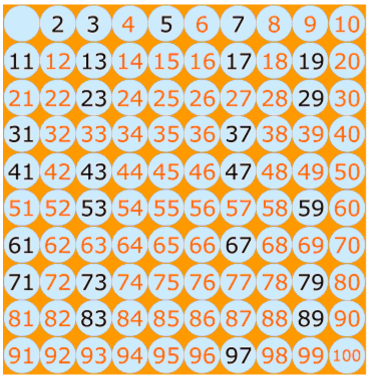
  Ejemplo: los divisores de 18 son seis D(18)={1, 2, 3, 6, 9, 18}

- El número 1 tiene un solo divisor, es el 1.

La división exacta es aquella cuyo resto es 0, el dividendo es múltiplo del divisor.

Es exacta. 48:8 = 6

- 48 es *múltiplo* de 8
- 8 es *divisor* de 48



- **Los números primos** son los que tienen dos divisores, que son el 1 y el mismo número.

  Ejemplo: números primos ={2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 ... }

- **Los números compuestos** son los que tienen más de 2 divisores. Se les llama así porque se pueden poner como producto de potencias de números primos.

  Ejemplo: números compuestos ={4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, ...}

- **Descomponer factorialmente un número** es ponerlo como producto de potencias de números primos.

  Ejemplo: $63=3^2\cdot 7$

- El **mínimo común múltiplo** de varios números es el número más pequeño que es múltiplo de todos ellos, sin tener en cuenta el 0.

  Producto de los factores comunes y no comunes elevados al exponente mayor

Ejemplo:

$54= 2\cdot 3^3$

$60= 2^2\cdot 3\cdot 5$

m.c.m.(54, 60) = $= 2^2\cdot 3^3\cdot 5 = 540$

m.c.d. (54, 60) = $2\cdot 3 =6$

- El **máximo común divisor** de varios números es el número más pequeño que es divisor de todos ellos.

  Producto de los factores comunes elevados al exponente menor

Cuando dos números no tienen en común más divisores que el 1 se dice que son primos entre sí.

Ejemplo 49 y 24 son primos entre sí porque m.c.d.(49, 24)=1

Autoevaluación

1. Escribe tres múltiplos de 26.

2. Escribe cuatro divisores de 24.

3. Indica si estas divisiones son exactas o no:

   a) 39 : 4

   b) 23 : 9

4. Basándote en los criterios de divisibilidad indica si el número 49755 es múltiplo o no de los indicados:

   a) de 2 :   b) de 3:   c) de 5:   d) de 11:

5. ¿En qué cifra pueden terminar los números primos a partir de 5?

6. Indica si los números 61, 60 y 65 son primos o compuestos.

7. Haz la descomposición factorial del número 240.

8. Calcula el m.c.m.(45,75)

9. Indica si los números 25 y 28 son primos entre sí o no.

10. Calcula el m.c.d.(45, 75)

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. 176 es múltiplo de 2, 4, 8.
2. 198 es divisible por 2, 3, 4, 9, 11
3. 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80. El 0 también se puede considerar ya que es múltiplo de todos.
4. 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96
5. Al descomponer en factores primos los exponentes son: 3, 1, 4. Aumentados cada uno de ellos en una unidad y multiplicados: $4 \cdot 2 \cdot 5 = 40$ divisores.
6. $810 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5$, $\quad 2 \cdot 5 \cdot 2 = 20$ divisores.
7. $6728 = 2^3 \cdot 29^2$
   Su número de divisores es $4 \cdot 3 = 12$.
   Hacemos 6 rayitas arriba y 6 abajo.

1	3	9	27	29	87
22707	7569	2523	841	783	261

   Observa que una vez calculados los de arriba, se divide el nº 22707 entre ellos y se obtienen los de abajo.
8. $147 = 3 \cdot 7^2$ $\quad 2 \cdot 3 = 6$ divisores

1	3	7
147	49	21

9. 247 es divisible por 13, compuesto.
10. 131, no es divisible por 2, ni por 3, ni por 5, ni por 7, ni por 11. Es primo.
11. a) $72 = 2^3 \cdot 3^2$ $\quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
    m.c.m.(72,60)=360
    b) $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$ $\quad 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
    m.c.m.(150, 90)=450
    c) $9 = 3^2$ $\quad 24 = 2^3 \cdot 3$ $\quad 6 = 2 \cdot 3$
    m.c.m(9, 24, 6) = 72
    d) $36 = 2^2 \cdot 3^2$ $\quad 15 = 3 \cdot 5$ $\quad 4 = 2^2$
    m.c.m.(36,15,4)=180
12. a) $72 = 2^3 \cdot 3^2$ $\quad 24 = 2^3 \cdot 3$
    m.c.d.(72, 24)= 24
    b) $56 = 2^3 \cdot 7$ $\quad 81 = 3^3$
    m.c.d.(56,81)=1, primos entre sí.
    c) $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ $\quad 108 = 2^2 \cdot 3^3$ $\quad 36 = 2^2 \cdot 3^2$
    m.c.d.(84,108,36)=12
    d) $54 = 2 \cdot 3^3$ $\quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $\quad 18 = 2 \cdot 3^2$
    m.c.d.(54,60,18)=6
13. Los días que han de pasar para volver a coincidir en la biblioteca son m.c.m.(4, 6)= 12 días.
14. El número de hileras que pueden hacer es el m.c.d.(30, 27, 42)= 3 hileras.
15. La longitud del lado en dm es el m.c.d.(10, 6)= 2 dm.
16. m.c.m.(9, 21, 15)= 315 minutos han de pasar para coincidir de nuevo.

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 52, 78, 260 por ejemplo
2. 2, 3, 4, 6 (también 8, 12, 1, 24)
3. Ninguna de las dos
4. Es múltiplo de 3 y de 5
5. En 1 , 3, 7 ó 9, como 11, 13, 17, 19
6. 61 primo, 60 y 65 compuestos
7. $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$
8. 225
9. Son primos entre sí
10. 15

No olvides enviar las actividades al tutor

3

Los números enteros

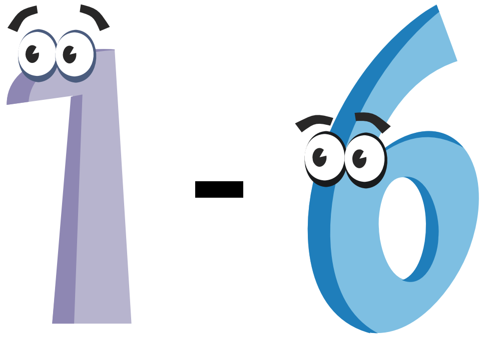
Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Utilizar números enteros en distintos contextos.
- Representar y ordenar números enteros.
  Hallar el valor absoluto y el opuesto de un número entero.
- Sumar, restar, multiplicar, dividir, realizar potencias y extraer raíces cuadradas de números enteros.
- Operar con números enteros respetando la jerarquía de las operaciones

Antes de empezar

¿Sabes el resultado de esta resta?



Aunque resulte extraño costó muchos años admitir que se podía realizar.

Parece que chinos e hindúes utilizaban cantidades negativas desde el siglo V. Pero no fueron admitidos en Occidente hasta muchos siglos más tarde.

¿Sabes cómo llamaban a los números negativos?

Números ficticios, absurdos, raíces falsas y números deudos.

Algún matemático llegó incluso a decir que no deberían haber sido admitidos y que deberían eliminarse.

¡SOS! estoy en números rojos

Esta chica ha visto su cartilla de ahorros

17-09-08	Ingreso en efectivo	300	+1930
18-09-08	Cajero automático	-200	+1730
19-09-08	Recibo mueble	-1500	+230
20-09-08	Recibo sofá	-1000	-770

El saldo es lo que se tiene en cada momento. Con cada ingreso (meter dinero) el banco suma. Con cada cargo (gasto) el banco nos resta esa cantidad. Los gastos son números negativos.

El día 20 de octubre esta chica **ha gastado más dinero del que tenía**. **Está en números rojos** , es decir **debe dinero al banco**.

Debe devolver ese dinero y además le van a cobrar una importante cantidad de dinero por ello

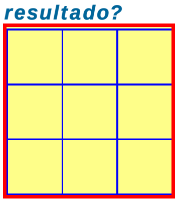
Pueden incluirla en una lista de morosos que puede darle muchos problemas más adelante

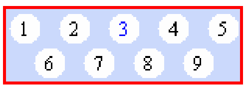
Cuadrados mágicos

(fragmento extraído de wikipedia)

En la antigua China ya se conocían los cuadrados mágicos desde el III milenio a. C., como atestigua el **Lo Shu**. Según la leyenda, un día se produjo el desborda miento de un río; la gente, intentó hacer una ofrenda al dios del río Lo para calmar su ira. El Dios no aceptaba la ofrenda y siempre aparecía una tortuga, hasta que un chico se dio cuenta de las marcas del caparazón de la tortuga, así pudieron incluir en su ofrenda la cantidad pedida (15), quedando el dios satisfecho y volviendo las aguas a su cauce.
En Occidente llegaron mucho más tarde, en el siglo XIV. ***Durante los dos siglos siguientes se llevaban grabados en una chapa como amuletos, pues se les atribuía poderes mágicos.***

¿Sabrías colocar los números del 1 al 9 en este recuadro de forma que la suma de todas las filas, diagonales y columnas dé siempre el mismo resultado?





1. Los números enteros

Introducción

En la vida real hay situaciones en las que los números naturales no son suficientes.

Por ejemplo: si tienes 10 euros y debes 15 euros ¿De cuánto dispones?. Observa a la derecha distintas situaciones en las que se necesitan números enteros.

Los números **enteros son una ampliación de los naturales:**

- Los naturales se consideran enteros positivos (se escriben con el signo +)
- Los enteros negativos van precedidos del signo -.
- El cero es un entero pero no es ni negativo ni positivo.

Debe 113 € Se escribe **-113**

Tiene 113 € Se escribe **+113**

El buzo está a 15 m de profundidad

Se escribe **-15 m**

El globo está a 20 m de altura.

Se escribe **+15 m**

La recta numérica

Los números enteros pueden ordenarse de menor a mayor en la recta numérica.

Debemos trazar una recta y pintar el cero en el centro
Dividir la recta en segmentos iguales
Colocar los nº positivos a partir del cero a la derecha.
y los nº negativos a partir del cero a la izquierda.

-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6

¿ Cuál es el valor de A y de B ?

0
B A

El valor de A = +1
El valor de B = - 6

Ordenar y comparar números enteros

Cuanto más a la derecha esté un número situado en la recta numérica mayor es.
Cuanto más a la izquierda esté situado menor es.

-1 0 +2
A B

-1 está más a la izquierda que +2
por tanto –1 es menor que +2.
Se escribe –1 < +2

¿Cuál es menor? ¿Cuál es mayor?

-6 -3 0
A B

-6 está a la izquierda de -3 ⇒
-6 es menor que –3.

Se escribe –6<-3

Valor absoluto

¿A qué distancia se encuentra –3 y cero?
¿A qué distancia se encuentra +7 de cero?

El valor absoluto de un número entero es **la distancia que le separa del cero.**
Se escribe entre dos barras | | y es el número sin su signo:

|+a| = a |-a| = a

|+4|=4

-5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5

La distancia de +4 a cero es 4.
El valor absoluto de +4 es 4.

|-3|=3

-5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5

La distancia de -3 a cero es 3.
El valor absoluto de -3 es 3.

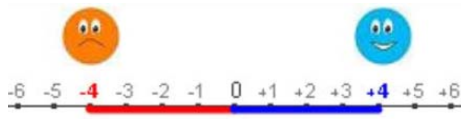
El valor absoluto es una distancia por lo que no puede ser negativo.

Opuesto de un número entero

Lo contrario de deber es tener.
Lo contrario de 4º C es 4º bajo cero.
Lo contrario de 5 m de altura es 5 m bajo el nivel del mar etc.

> El opuesto de un número entero **es su simétrico respecto del cero.**
> Se escribe así: Op(+a) = -a
> Op(-a) = +a

Si hablamos de dinero ¿cómo están relacionadas las cantidades +4 y –4?



-4 y +4 son opuestos.
Se escribe op(+4)=-4
ó op(-4) = +4
+4 y –4 son simétricos respecto del cero

EJERCICIOS resueltos

1. Escribe el número que mejor representa la situación que se plantea:

a) Bajamos al sótano 3

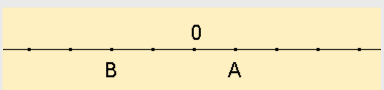
b) Nació en el año 234 antes de Cristo

c) El avión vuela a 2455 m de altura

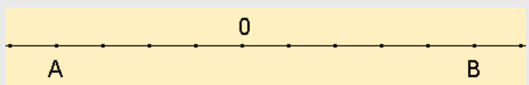
d) El termómetro marcaba 5º C bajo cero

2. ¿Cuál es el valor de A y de B?

a)



b)



3. Escribe el signo < o > según convenga:

a) –2 -6 b) –2 +4 c) +5 +12 d) +4 -8

4. Ordena de menor a mayor

a) +6, -5, -10, +12 b) +4, -20, -7, -4

5. Completa adecuadamente

a) |-5| = b) |+7| = c) op(+6)= d) op(-4)=

Soluciones:

1. a) –3 b) –234 c) +2455 d) –5
2. a) A=+1 B= -2 b) A=-4 B=+5
3. a) –2 > -6 b) –2 < +4 c) +5 < +12 d) +4>-8
4. a) –10<-5<+6<+12 b) –20<-7<-4<+4
5. a) +5 b) –7 c) –6 d) +4

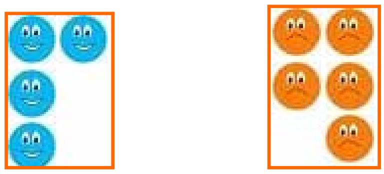
2. Suma y diferencia de enteros

Suma de dos enteros

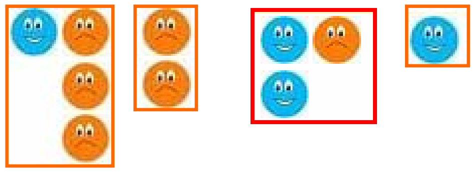
¿Qué significan las siguientes expresiones?

- **+6 +3 = +9**
  tienes 6 € y te dan 3 € => **tienes 9** €.
- **-7 -5 = -12**
  debes 7 € y gastas 5 € => acumulas una **deuda de 12** €
- **-6 +8 = +2**
  tienes 8 € pero debes 6 € => **tienes 2 €.**
  El dinero supera las deudas
- **-5 +3 = -2**
  debes 5 € y tienes 3 € => **debes 2 €.**
  Las deudas superan el dinero.

+3+1=+4 -2-3 =-5



+1-3 = -2 +2 -1 = +1



Suma de tres o más enteros

Para sumar 3 ó más enteros tenemos dos métodos:

1) Agrupar los dos primeros sumandos y sumar al resultado el tercer sumando

+6 -4 +3 = -2 +3 = +1

En el caso de 4 sumandos se puede agrupar de dos en dos:

+6 -4 +3 -2 = +2 +1 = +3

2) Sumar los positivos por un lado (tener) y los negativos (deber) por el otro y finalmente hallar el resultado

deber tener

-7 +8 -5 = -12 +8 = -4

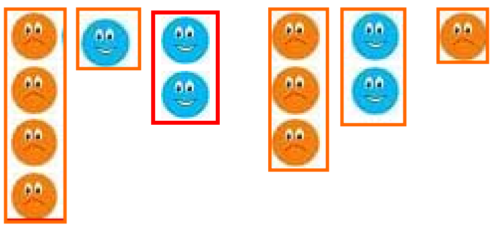
deber tener

+6 -4 +3 -2 = -6 +9 = +3

¿Cómo sumar –4 +1+2?

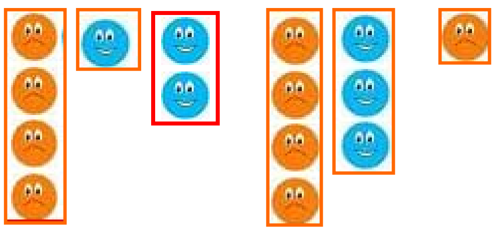
1º método: agrupando

-4 + 1 + 2 = -3+2 = -1



2º método: deber–tener

-4 + 1 + 2 = -4+3 = -1



¿Qué significan las expresiones?

+(+3) +(-3) -(+3) -(-3)

¿Debo o tengo?

+(+a) = +a -(-a) = +a

+(-a) = -a -(+a) = -a

Si los dos signos son <u>iguales</u> el resultado positivo

Si los dos signos son <u>distintos</u> el resultado es negativo

Ejemplos: +(+2) =+2 -(-2) = +2

- (+2) = -2 +(-2) = -2

Expresiones sencillas con paréntesis

El signo más (+) puede indicar suma o que el nº es positivo.

El signo menos (-) puede indicar resta o que el nº es negativo.

¿Cómo escribimos "***sumar*** al 5 el nº -6"?

No es correcto escribir 5 **+** -6 , lo correcto es 5**+**(-6)

¿Cómo escribir "***restar*** al 6 el nº -8"?

No es correcto 6 **-** -8 lo correcto es 5 **-** (-8)

No podemos escribir dos signos seguidos, debemos separarlos mediante un paréntesis

¿ Cuál es el resultado?

	Eliminar paréntesis	Operar
(+3) + (-5) =	**+3 – 5**	= -2
(-2) + (+4) =	**-2 + 4**	= +2
(+1) - (+7) =	**+1 – 7**	= -6
(+2) - (-6) =	**+2 + 6**	= +8
(-2) - (+6) =	**-2 - 6**	= -8

Suma y diferencia de enteros con paréntesis

Cuando se presenten ejercicios del tipo:

- (-5) + (-2) =
- (+3) - (-7) =

Deberemos

1º) Eliminar los paréntesis

2º) Operar adecuadamente los nº resultantes

Recuerda que : + (+a) = +a - (+a) = -a

+ (-a) = -a - (-a) = +a

Lo anterior es válido si hay tres ó más enteros, fíjate en los ejemplos .

(+2) - (+6) + (-5) = **+2 - 6 - 5** = -9

(-3) + (-5) - (-7) = **-3 – 5 + 7** = -5

(-2) – (-5) + (-3) – (-2) = **-2 +5 –3 +2** = +2

(-3) + (-4) – (-3) + (-1) = **-3 –4 +3 –1** = -5

EJERCICIOS resueltos

6. Realiza las siguientes sumas de números enteros

a) +7 +4 = b) –5 –4 = c) +8 –2 = d) –5 +9 =

7. Realiza la siguientes sumas de números enteros usando el método de agrupar

a) –4 + 5 –3 = b) +3 –5 +7 = c) –3 + 5 –8 = d) +4 – 7 –8 =

8. Realiza la siguientes sumas de números enteros usando el método de tener y deber

a) –4 + 5 –3 = b) +3 –5 +7 = c) –3 + 5 –8 = d) +4 – 7 –8 =

9. Escribe el resultado

a) + (+3) = b) – (+4)= c) – (-5)= d) + (-2) =

10. Realiza las siguientes sumas y diferencias de números enteros

a) +(+3) + (-5) =

b) –(+4) – (+6) =

c) – (-5) + (+7) =

d) -(+3) + (+1) – (-4) =

e) -(+2) - (+1) – (+5) =

f) -(+2) + (-1) + (-4) – (-5)=

g) -(+1) - (+3) - (-4) – (-5)=

Soluciones:

6) a) +7 +4 = +11 b) –5 –4 = -9
c) +8 – 2 = +6 d) –5 +9 = +4

7) a) –4+5-3 = +1-3=-2 b) 3 –5+7 = -2 +7 =+5
c) –3+5-8=+2-8=-6 d) +4-7-8 = -3-8 =-11

8) a)-4+5-3 = -7+2=-5 b) 3-5+7 =-5+10=+
c)-3+5-8 =-11+5=-6 d) +4-7-8= 4-15 =-11

9) a) +3 b) –4
c) +5 d) –2

10) a) +3-5=-2 b)-4-6=-10
c) +5+7 = +12 d) –3+1+4=+2
e)-2-1-5 = -8 f) –2-1-4+5 = -2
g) –1-3+4+5 = 5

3. Producto y división de enteros

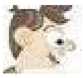
★*Juan ahorra 6 al mes, ¿cuánto ahorrará al cabo de 4 meses?*

(+6)·(+4) =+24 € ahorrará al cabo de 4 meses.

★*Ana gasta 5 al mes. ¿Cuánto gastará al cabo de 3 meses?*

(-5)·(+3) =-15 € gastará al cabo de 3 meses.

★ *Luis gasta 7 al mes en CD. Deja de comprar durante 2 meses. ¿Cuánto ha ahorrado?*



(-7)·(-2) =+14 € ahorrará al cabo de 2 meses.

Producto de enteros

Para multiplicar enteros debemos:

1º) Multiplicar los nº sin signo

2º) Aplicar la regla de los signos

+	·	+	=	+
−	·	−	=	+
+	·	−	=	−
−	·	+	=	−

Ejemplos:

(+4)·(+3) = +12

(-2)·(-5) = +10

(+4)·(-2) = -8

(-6)·(+4) = -24

¿Qué número multiplicado por +6 da +30?

(+6)·$\boxed{\quad}$=+30

(+30):(+6)=+5

(–5)·$\boxed{\quad}$=+15

(+15): (–5)=–3

¿Qué número multiplicado por -5 da +15?

¿Qué número multiplicado por -7 da -21?

(–7)·$\boxed{\quad}$ =–21

(–21): (–7)=+3

División de enteros

Para dividir enteros debemos:

1º) Dividir los nº sin signo 8 – 9

2º) Aplicar la regla de los signos

+	:	+	=	+
−	:	−	=	+
+	:	−	=	−
−	:	+	=	−

Ejemplos:

(+24):(+3) = +8

(-20):(-5) = +4

(+14):(-2) = -7

(-16):(+2) = -8

EJERCICIOS resueltos

11. Realiza los siguientes productos y divisiones de números enteros

a) (+4)·(+3)= b) (+5)·(-2)= c) (-4)·(-5)= d) (-3)·(+7)=

e) (+24):(+3)= f) (+15):(-3)= g) (-14):(-2)= h) (-30):(+6)=

Soluciones:

a) +12 b) –10 c) +20 d) –21 e) +8 f) –5 g) +7 h) –5

4. Potencia y raíz cuadrada

Potencias de enteros

Según se trate de un número positivo o negativo, tenemos los siguientes casos:

$(+a)^n$ $\quad 5^3 = (+5)\cdot(+5)\cdot(+5)$

$(-a)^{par}$ $\quad (-3)^4 = \underbrace{(-3)\cdot(-3)}_{+}\cdot\underbrace{(-3)\cdot(-3)}_{+}$

$(-a)^{impar}$ $\quad (-3)^3 = \underbrace{(-3)\cdot(-3)}_{+}\cdot\underbrace{(-3)}_{-}$

Base positiva

$(+2)^3 = (+2)\cdot(+2)\cdot(+2) = +8$

$(+2)^4 = (+2)\cdot(+2)\cdot(+2)\cdot(+2) = +16$

Base negativa exponente par

$(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$

Base negativa exponente impar

$(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = +16$

- El resultado de una potencia de un número positivo es positivo.
- El resultado de una potencia de un número negativo es positivo si el exponente es par y negativo si el exponente es impar.

Raíz cuadrada de un número entero

- Raíz cuadrada de un número **positivo**.

$\sqrt{16} = b \Leftrightarrow b^2 = 16$

Las posibilidades son: $4^2=16$

$(-4)^2=16$

Un nº positivo tiene dos raíces cuadradas

Se escribe

$\sqrt{16} = \pm 4$

- Raíz cuadrada de un número **negativo**

$\sqrt{-36} = b \Leftrightarrow b^2 = -36$

Observa que: b^2 es **positivo**

-36 es **negativo**

No es posible encontrar solución para b

No existe raíz cuadrada de un número negativo.

$\sqrt{64} = \underline{+}8$

$\sqrt{25} = \underline{+}5$

$\sqrt{-100} =$ No existe raíz

$\sqrt{-36} =$ no existe raíz

EJERCICIOS resueltos

12. Calcula las siguientes potencias y raíces cuadradas

a) $(+3)^2 =$ b) $(-5)^3 =$ c) $(-3)^4 =$ d) $(-3)^5 =$ e) $(-2)^4 =$

f) $\sqrt{-16} =$ g) $\sqrt{9} =$ h) $\sqrt{-9} =$ i) $\sqrt{25} =$ j) $\sqrt{16}$

Soluciones:

a) +9 b) -125 c) +81 d) –243 e) +16

f) no existe raíz g) ±3 h) no existe raíz i) ±5 j) ±4

5. Operaciones combinadas

Ej 1: **+3 – (+4)·(-2) =**

1.-Multiplicar	+3 – (-8) =
2.-Eliminar paréntesis	+3 +8 =
3.-Sumar	+11

Ej 2: **+1 + (-6):(+4-7)=**

1.-Paréntesis	+1 + (-6): (-3) =
2.-División	+1 + (+2) =
3.-Quitar paréntesis	+1+2 =
4.-Sumar	+3

Ej 3: -4 + [-3 – (-14):(+2)] =

1.-División paréntesis	-4+[-3-(-7)]=
2.-Quitar paréntesis	-4 +[-3+7]=
3.-Suma paréntesis	-4 + [+4] =
4.-Quitar paréntesis	-4 +4=
5.-Sumar	0

Jerarquía de operaciones

Observa que hay dos tipos de paréntesis:

- Paréntesis de tipo I: en ellos hay operaciones
  Por ejemplo: 3+4-(2+3·5) =
- Paréntesis de tipo II: sirven para separar signos.
  Ejemplo: -3- (-4) + (-2) =

Los primeros deben operarse en primer lugar y los segundos deben eliminarse en el momento oportuno.

Para realizar operaciones con números enteros se ha de respetar el siguiente orden :

1ª) operar los paréntesis (tipo I)

2º) realizar las multiplicaciones y las divisiones

3º) realizar las sumas y las restas

EJERCICIOS resueltos

13. Realiza las siguientes operaciones

a) +7 + (-9)·(+5) =

b) –5 + (-6):(+6) =

c) +1-(-36):(-9-9) =

d) +1 +(+6)·(+5-6) =

e) –6 – [+3 -(-5): (+5)] =

f) +8+ [+4 +(-7)·(-9)] =

Soluciones:

a) +7 + (-45) = +7 –45 = -38
b) –5+(-1) = -5-1 = -6
c) +1-(-36) : (-18) = +1 – (+2) = +1-2 = -1
d) +1+(+6)·(-1) = +1+(-6) = +1 –6 = -5
e) –6 – [+3 – (-1)] = -6 - (+3+1) = -6-(+4) = -6 –4 = -10
f) +8+[+4+(+63)] = +8+(+4+63) = +8 +(+67) = +8 +67 = +75

Para practicar

1. Calcula las siguientes sumas de números enteros:
   - a. $+2-1-6+4$
   - b. $-8+6-2+5$
   - c. $(-9)+(+7)+(+1)$
   - d. $(-8)+(+8)-(-2)$

2. Calcula las siguientes sumas de números enteros
   - a. $(+2)-(-9)-(-8)-(-8)$
   - b. $(+4)+(-7)-(+2)+(+1)$
   - c. $(+2)-(+8)+(-5)-(-3)-(+1)$
   - d. $(-1)+(-1)+(-5)-(+7)+(-7)$

3. Operar respetando la jerarquía de operaciones
   - a. $-5+(+1)\cdot(-1)$
   - b. $-1-(-3):(-3)$
   - c. $-6-(-7)\cdot(-6-2)$
   - d. $-2-(-15):(8+7)$

4. Operar respetando la jerarquía de operaciones
   - a. $-4-(+24):(+1-9)-(-1-2)$
   - b. $+7+(-5):(-7+2)-(+1-6)$
   - c. $-6-[+7+(+1)\cdot(-1)]$
   - d. $+7+[+1-(+10):(+5)]$

5. Operar respetando la jerarquía de operaciones
   - a. $+4+[+2+(+8)\cdot(-6)-(-7+6)]$
   - b. $-2-[-6+(-4):(-2)-(+7-5)]$
   - c. $+1-[-4+(-10):(-5)]+[+3+(-9):(-9)]$
   - d. $+1-[+3-(-8)\cdot(+8)]+[+6+(+8):(+4)]$

Problemas de planteamiento

6. Una persona nació en el año 17 antes de Cristo y se casó en el año 24 después de Cristo. ¿A qué edad se casó?

7. En el año 31 después de Cristo una persona cumplió 34 años. ¿En qué año nació?

8. Una persona nació en el año 2 antes de Cristo y se casó a los 25 años ¿En qué año se casó?

9. El termómetro marca ahora 7ºC después de haber subido 15ºC. ¿Cuál era la temperatura inicial?

10. Hace una hora el termómetro marcaba –2ºC y ahora marca 2ºC. LA temperatura ¿ha aumentado o ha disminuido? ¿Cuánto ha variado?

11. Por la mañana un termómetro marcaba 9º bajo cero. La temperatura baja 12º C a lo largo de la mañana.¿Qué temperatura marca al mediodía?

12. El ascensor de un edifico está en el sótano 1 y sube 5 pisos hasta que se para. ¿A qué planta ha llegado?

13. Una persona vive en la planta 2 de un edificio y su plaza de garaje está en el sótano 1.¿Cuántas plantas separan su vivienda de su plaza de garaje?

14. Después de subir 6 pisos el ascensor de un edificio llega al piso 5.¿De qué planta ha salido?

15. Elena tenía ayer en su cartilla –234 euros y hoy tiene 72 euros. Desde ayer ¿ha ingresado o ha gastado dinero? ¿Qué cantidad?

16. El saldo de la cartilla de ahorros de Elena es hoy 154 ∈. Le cargan una factura de 313 ∈. ¿Cuál es el saldo ahora?

Para saber más

El origen de las cosas ...

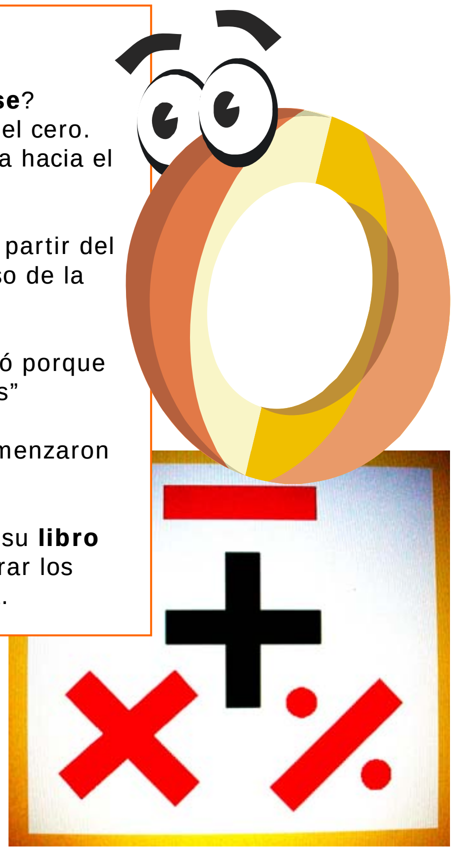
¿Sabías que **el cero tardó mucho tiempo en utilizarse**?
En la mayoría de los sistemas numéricos antiguos no existía el cero.
Se cree que fueron los hindúes los que lo utilizaron por primera hacia el año 650 d.C

Los signos de sumar y restar + y – comenzaron a usarse a partir del siglo XV. Antes se usaban palabras o abreviaturas. En el caso de la suma se usaba p (plus) y para la resta m (minus)

El signo = apareció en el siglo XVI y parece que la idea surgió porque "no hay dos cosas más iguales que dos rectas paralelas"

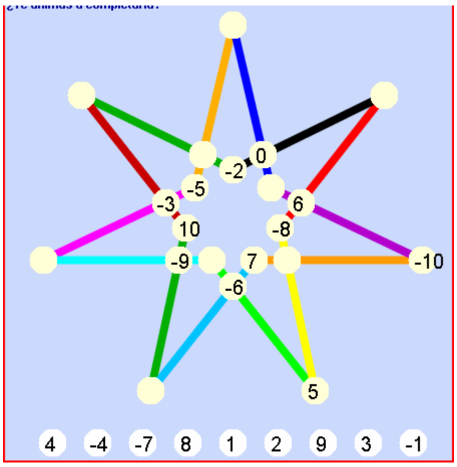
Los símbolos de la multiplicación (x) y la división (:) comenzaron a usarse en el siglo XVII.

El matemáticos italiano Gerolamo **Cardano** (1501-1576) en su **libro Ars Magna** fue el primero que enunció las reglas para operar los números enteros tay y como las utilizamos hoy en día.



Estrella mágica de siete puntas

La suma de los 3 números de cada segmento debe ser cero. ¿Te animas a completarla?



¿Es difícil crear cuadrados mágicos?

Crearlos con números enteros es muy fácil.
Basta tomar uno hecho y sumar a cada una de sus cifras una cantidad fija.

Por ejemplo

Suma de cada línea = 3

2	-3	4
3	1	-1
-2	5	0

+ 9 =

Suma de cada línea = 30

11	6	13
12	10	8
7	14	9

También los conseguirás si dado uno restas una cantidad o si dado un cuadrado mágico multiplicas o divides a cada número por una cantidad fija.
Observa que esa cantidad puede ser positiva o negativa, según prefieras.

Recuerda lo más importante

El conjunto de los **números enteros está formado por los números positivos, los negativos y el cero.**

Los enteros aparecen en muchas situaciones de nuestro alrededor: temperaturas, fechas, dinero y deudas, ascensores, alturas y profundidades ...

Se pueden representar en la recta :

-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7

Los números enteros **están ordenados.**
Un número es menor que otro si, en la recta, está situado más a la izquierda.
Un número es mayor que otro si, en la recta, está situado más a la derecha.

El **valor absoluto** de un número es la distancia del número al cero.

$|+a| = a$
$|-a| = a$

El **opuesto** de un nº es otro número con la misma magnitud y distinto signo.

Op (+a) = -a
Op (-a) = +a

Suma de enteros

Se eliminan paréntesis
Si tienen el mismo signo: se suman y se pone el mismo signo
Si tienen distinto signo: se restan y se pone el signo del mayor

Resta de enteros

Se aplica la regla:

$+(+a) = +a$ $\quad -(+a) = -a$
$-(-a) = +a$ $\quad +(-a) = -a$

Se procede como en la suma

Producto
Se multiplican los números sin signo
Se aplica la regla de los signos.

$+ \cdot + = +$
$- \cdot - = +$
$+ \cdot - = -$
$- \cdot + = -$

División
Se dividen los números sin signo
Se aplica la regla de los signos

$+ : + = +$
$- : - = +$
$+ : - = -$
$- : + = -$

4 + [8 – (-4)·(-2) – 5] =

1.-Multiplicación paréntesis	4+[8–(+8)–5]=
2.-Quitar paréntesis	4 +(8–8–5)=
3.-Suma paréntesis	4 + (-5) =
4.-Quitar paréntesis	4 – 5 =
5.-Sumar	0

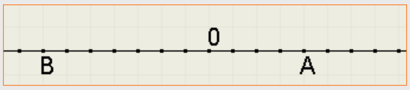
Jerarquía de operaciones
En operaciones combinadas debe respetarse este orden:

1.- Los paréntesis
2.- Las multiplicaciones y las divisiones.
3.- Las sumas y las restas

Autoevaluación

1. Escribe el número entero que corresponde a cada situación:

   a) El ascensor subió a la planta 7
   b) El submarino estaba a 57 m de profundidad
   c) Nació el año 38 antes de Cristo
   d) Juan tiene 19 €



2. ¿Cuál es el valor de A y de B?

3. Calcula:

   a) | -14 | = b) | 9 | =

   c) op (-19) = d) op(+5)=

4. Señala el menor y el mayor de -32,-18, -43 y 15

5. Calcula $-7 -3 +5 =$

6. Calcula $(-9)+(-4)-(-1)+(+4) =$

7. Calcula a) $(-2) \cdot (-7) =$

   b) $(+30) : (-5) =$

8. Calcula a) $(-2)^3 =$

   b) $(+3)^4 =$

9. Calcula $+2 + [-3 + (-5)\cdot(+4)] =$

10. Una persona nació en el año 6 antes de Cristo y se casó en el año 18 después de Cristo. ¿A qué edad se casó?

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) -1
   b) +1
   c) -1
   d) +2
2. a) +27
   b) -4
   c) -9
   d) -21
3. a) -6
   b) -2
   c) -62
   d) -1
4. a) +2
   b) +13
   c) -12
   d) +6
5. a) -41
   b) +4
   c) +7
   d) -62
6. Tenía 41 años
7. –3. El año 3 antes de Cristo
8. 23 después de Cristo
9. –8º C. (8º bajo cero)
10. Ha aumentado 4º C
11. –21ºC. Marca 21º bajo cero
12. Ha llegado a la planta 4
13. Hay 3 plantas de separación
14. En el sótano 1
15. Ha ingresado 306 €
16. –159 €. Debe 159 €

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. a) +7 b) –57 c) –38 d) +19
2. A = +4 B = -7
3. a) 14 b) 19 c) 19 d) -5
4. El menor = -43 y el mayor = 15
5. -5
6. -8
7. a) 14 b) –6
8. a) -8 b) 81
9. -21
10. 24 años

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

4

Los números decimales

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Conocer el valor de las cifras de un número decimal.
- Ordenar números decimales.
- Aproximar por redondeo números decimales.
- Representar gráficamente números decimales.
- Sumar, restar, multiplicar y dividir números decimales.
- Transformar unidades de longitud, de capacidad y de peso.

Antes de empezar

1. Los números decimales

Numeración decimal

Si la unidad se divide en 10 partes iguales, cada una de ellas es una **décima**; si se divide en 100 partes iguales, se obtienen **centésimas**, en 1000, **milésimas**; y si seguimos, aparecen **diezmilésimas**, **cienmilésimas**, **millonésimas**...

Una centena tiene 10 decenas, cada decena tiene 10 unidades, cada unidad tiene 10 décimas, cada décima tiene 10 centésimas, cada centésima tiene 10 milésimas...

A la izquierda de la coma decimal está la **parte entera** y a la derecha la **parte decimal**

2 5 , 7 8 6

6 milésimas
8 centésimas
7 décimas
5 unidades
2 decenas

25,786
parte entera parte decimal

Orden en los números decimales

Para ordenar los números decimales:

1º se comparan sus partes enteras y, si coinciden,

2º se comparan sus partes decimales empezando por las décimas, y si son iguales se comparan las centésimas,...

Un número no cambia si se añaden ceros a la derecha de su parte decimal

25,34 > 25,318

25,34
Primera cifra distinta
25,318

Aproximación por redondeo

Es la sustitución, a partir de cierto lugar, de todas las cifras por ceros. Pero si la primera cifra que se sustituye es 5 o mayor que 5 se aumenta en uno la cifra anterior a la sustituida.

El número **649,595**

Redondeado a las *centenas*:

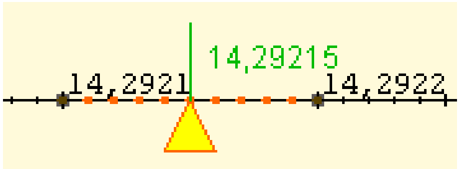
La cifra de las centenas es 6, la cifra siguiente es un 4, menor que 5, luego el nº redondeado es:

600

Redondeado a las *centésimas*:

La cifra de las centésimas es 9, la cifra siguiente es un 5, luego el nº redondeado es:

649,60



Representación de números decimales

Los números decimales se representan en la recta numérica.

Para representar un número decimal, se buscan los dos números enteros entre los que está comprendido; estos dos números determinan un segmento en la recta numérica. El segmento se divide en 10 partes iguales (décimas), o en 100 partes iguales (centésimas)... hasta llegar al número decimal dado.

EJERCICIOS resueltos

1. Subraya la cifra que te indican en los siguientes números:
   a. Centésimas en 126,346
   b. Decenas en 3384,859
   c. Cienmilésimas en 7346,2378

Solución
   a. 126,346   b. 3384,859   c. 7346,23780

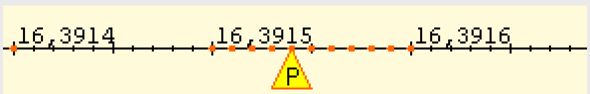
2. Utiliza los símbolos < > o = para las siguientes parejas de números:
   a. 3,44   3,5
   b. 55,3675   55,37
   c. 90,090   90,0890

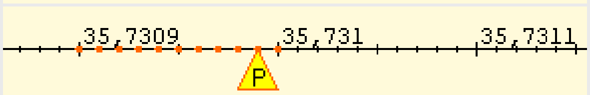
Solución
   a. 3,44 < 3,5   b. 55,3675 < 55,37   c. 90,090 > 90,0890

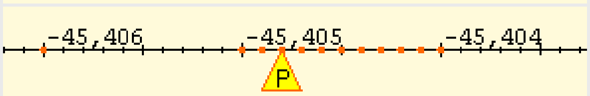
3. Aproxima mediante redondeo:
   a. 55,344 a las centésimas
   b. 29,9999 a las milésimas
   c. 7345,45 a las decenas

Solución
   a. 55,34   b. 30,000   c. 7350

4. Escribe el número decimal que se corresponde con la letra P:

a. 

b. 

c. 

Solución
   a. 16,39154   b. 35,73099   c. -45,4048

2. Operaciones

Suma y resta

- Se escriben los números con la misma cantidad de cifras decimales.
- Se suman o restan como si no estuviese la coma decimal.
- La coma decimal se coloca donde estaba.

Las reglas para las operaciones con decimales son las mismas que en los números enteros.

Para restar, el minuendo (arriba) es mayor que el sustraendo (abajo).

3,73 + 0,1196=
=3,7300+0,1196=
=3,8496

3,73 – 0,1196=
=3,7300–0,1196=
=3,6104

Multiplicación

- Nos olvidamos de la coma decimal.
- Multiplicamos como si fuesen números enteros.
- La coma decimal se mueve, hacia la izquierda, tantos lugares como la suma del número de decimales de los dos factores. Si es preciso, se añaden ceros por la izquierda.

Para multiplicar por 10, 100, 1000,... se desplaza la coma hacia la derecha 1, 2, 3,... lugares.

0,1713 · 8,6 = 1,47318

1713 · 86 = 147318

0,083·10000=
=0,0830·10000 = 830

División

- Quitamos las comas decimales. Para ello, el dividendo y el divisor deben tener el mismo número de cifras decimales.
- Dividimos como si fuesen números enteros.
- Cuando no queden cifras en el dividendo para bajar, en el cociente se coloca la coma decimal y se baja un cero para continuar la división. Se bajarán tantos ceros como decimales necesitemos en el cociente.

5,72 : 1,2=
=5,72 : 1,20 = 572 : 120

```
572      |120
 0920     4,76
  0800
   080
```

Se coloca la coma decimal, se añade un cero a 92 y se continúa la división.

5,423 : 100=

=005,423 : 100 = 0,05423

Para dividir por 10, 100, 1000,... se desplaza la coma hacia la izquierda 1, 2, 3,... lugares.
Si es preciso, se añaden ceros por la izquierda.

EJERCICIOS resueltos

12. Calcula:

a) 60,75+0,3= b) 8,013+132,8=
c) 36,8−4,016= d) 3−5,33=
e) 0,834−8,74== f) 9,35−(9,37−0,992)=
g) 0,38−(7,91+4,6)= h) 0,766−(4,697−0,58)=

Solución
a) 61,05 b) 140,813 c) 32,786 d) −2,33
e) −7,906 f) 0,972 g) −12,13 h) −3,351

13. Calcula:

a) 0,7·32= b) 0,9·0,06=
c) 0,76·0,8= d) 2,7·0,59=

Solución
a) 22,4 b) 0,054 c) 0,608 d) 1,593

14. Calcula con dos cifras decimales:

a) 0,8:0,02= b) 0,08:0,2=
c) 0,56:0,007= d) 2,7:0,59=

Solución
a) 40 b) 0,4 c) 80 d) 4,57

15. Calcula:

a) 0,675·100= b) 3,54·0,1=
c) 0,01·0,001= d) 2,8:1000=
e) 0,55:0,01= f) 0,1:0,001=

Solución
a) 67,5 b) 0,354 c) 0,00001
d) 0,0028 e) 55 f) 100

16. Calcula:

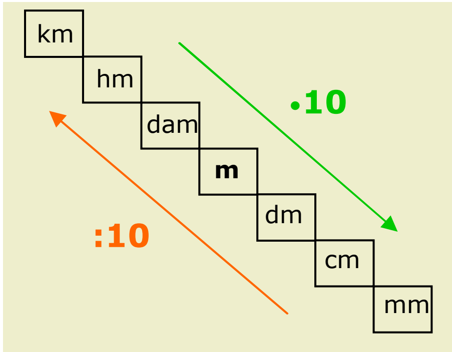
a) 3,14:(100·0,1)= b) 10:(100:1000)=
c) 0,1:(0,01:0,001)= d) 4:(10·0,0001)=
e) 0,056:(0,01:10)= f) 66,66:(0,001:100)=

Solución
a) 3,14:10=0,314 b) 10:0,1=100 c) 0,1:10=0,01
d) 4:100000=0,00004 e) 0,56:0,001=560 f) 66,66:0,00001=6666000

2. Sistema Métrico Decimal

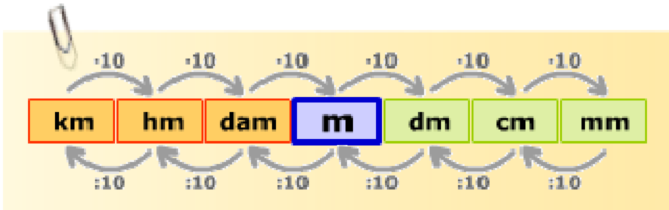
Unidades de longitud

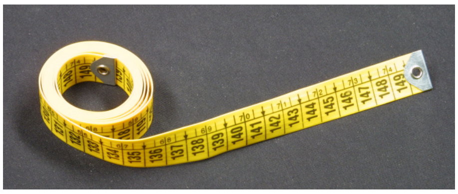
Sirven para medir distancias. La unidad fundamental es el **metro** que se representa con el símbolo **m**.



- Sus múltiplos son: decámetro (**dam**), hectómetro (**hm**) y kilómetro (**km**).
- Sus submúltiplos son: decímetro (**dm**), centímetro (**cm**) y milímetro (**mm**).

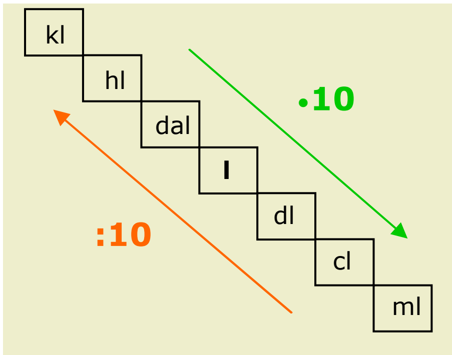
Para cambiar de una unidad a otra, se multiplica o divide sucesivamente por 10.





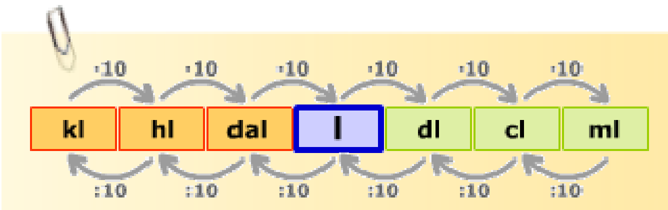
Unidades de capacidad

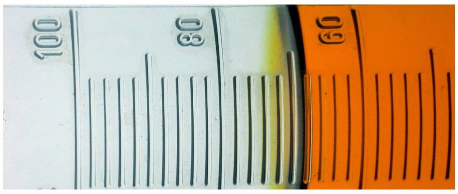
Sirven para medir líquidos. La unidad fundamental es el **litro** que se representa con el símbolo **l**.



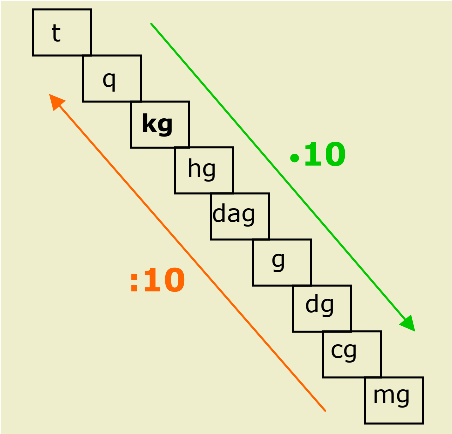
- Sus múltiplos son: decalitro (**dal**), hectolitro (**hl**) y kilolitro (**kl**).
- Sus submúltiplos son: decilitro (**dl**), centilitro (**cl**) y mililitro (**ml**).

Para cambiar de una unidad a otra, se multiplica o divide sucesivamente por 10.





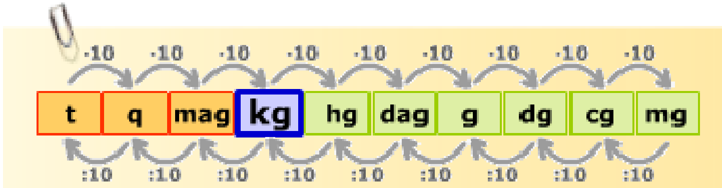
Unidades de peso



Sirven para medir la masa de un cuerpo. La unidad fundamental es el **kilogramo** que se representa con el símbolo **kg**.

- Sus múltiplos son: miriagramo (**mag**), quintal métrico (**q**) y tonelada métrica (**t**).
- Sus submúltiplos son: hectogramo (**hg**), decagramo (**dag**), gramo (**g**), decigramo (**dg**), centigramo (**cg**) y miligramo (**mg**).

Para cambiar de una unidad a otra, se multiplica o divide sucesivamente por 10.



EJERCICIOS resueltos

17. Convierte:

a) 0,252 m=	cm	b) 4,85 dm=	hm
c) 0,01·dam=	mm	d) 3,33 km=	dm
e) 0,501 dm=	m	f) 15,3 dm=	dam

Solución

a) 25,2 cm	b) 0,0485 hm	c) 100 mm
d) 33300 dm	e) 0,0501 m	f) 0,153 dam

18. Convierte:

a) 0,52 l=	dl	b) 48,5 dal=	hl
c) 0,001·kl=	ml	d) 1,23 hl=	cl
e) 840 ml=	hl	f) 15,3 dal=	dl

Solución

a) 5,2 dl	b) 4,85 hl	c) 0,000 000 001 ml
d) 12300 dl	e) 0,084 hl	f) 1530 dl

19. Convierte:

a) 64,6 kg=	cg	b) 14,95 t=	kg
c) 0,051·mag=	mg	d) 388,73 hg=	q
e) 0,001 g=	dag	f) 9,3 dg=	t

Solución

a) 6460000 cg	b) 14950 kg	c) 510000 mg
d) 0,38873 q	e) 0,0001 dag	f) 0,00000093 t

Para practicar

1. Calcula:

a) 49–4,5·0,01=

b) 0,5+0,4:0,1=

c) 7,52–37·0,1=

d) 0,97–0,1·0,01=

2. Calcula:

a) 6,3:0,1+15·0,08+0,59=

b) 5,2:0,01–5,6·5-29=

c) 0,73:0,001–5,1·11–7,3=

d) 0,33:0,01–3,1 53+0,07=

3. Calcula:

a) 5·(10,5–1,9)·0,001=

b) 30·(0,74+0,36):0,01=

c) 9,8·(14–4,2):0,1=

d) 1,9·(0,61–0,52)·0,01=

4. Calcula:

a) 0,39+4,2·(0,3+60·0,1)=

b) 62–3,8·(0,33+0,84:0,1)=

c) 0,2–0.8·(20+9,8:0,01)=

d) 1,4–0.4·(0,25+0,75:0,01)=

5. Ana compró 12 gominolas y 14 chicles. Cada gominola cuesta 0,10 € y cada chicle 0,15. Pagó con un billete de 10 €.
¿Cuánto dinero le tienen que devolver?

6. Yo vivo en un quinto piso. Entre cada piso hay 15 escalones iguales que miden cada uno 0,175 m. Además hay que pasar un escalón en el portal que mide 0,15 m.
¿A cuántos metros de altura está el suelo de mi piso?

7. Un coche consume una media de 4,2 litros de gasolina cada 100 km. Tiene el depósito lleno y son 45 litros. Recorre 888 km.
¿Cuántos litros de gasolina quedan, aproximadamente, en el depósito?

8. Un depósito contiene 124 litros de zumo. Con 57 litros se llenan botellas de 0,25 litros cada una y con el resto que queda en el depósito se llenan botellas de 0,5 litros.
¿Cuántas botellas se llenan en total?

9. Un paquete de 500 folios tiene un grosor de 6,8 cm y pesa 0,884 g.
¿Cuál es el grosor, en mm, de un folio? ¿Cuál es el peso, en gramos, de un folio?

10. Una caja contiene 35 bombones iguales y pesa 0,471 kg. El peso de caja vacía es 149 g.
¿Cuántos kg pesa la caja después de comernos 26 bombones?

11. Una cucharada de arroz pesa 1,8 dg y contiene 72 granos.
¿Cuántos granos de arroz habrá en un kilo?

12. Sabiendo que un litro de agua pesa un kg, expresa en toneladas el peso del agua de un depósito que contiene 58,75 hl.

13. Miguel tiene 43 € en monedas de 5 céntimos. Cada moneda pesa 3,92 g.
¿Cuántos kg pesan todas las monedas?

14. Un grifo no cierra bien y pierde 2 ml de agua cada 5 segundos.
¿Cuántos litros se perderán en una semana?

Para saber más

Decimales periódicos

Al dividir dos números y obtener decimales, el cociente es un número decimal que puede ser:

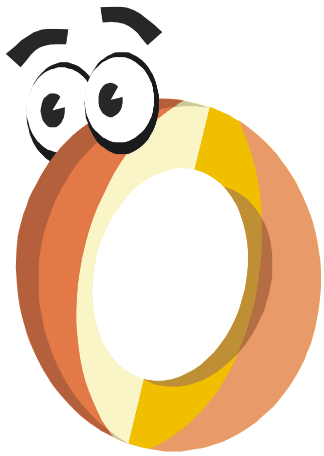
- Exacto si el resto es cero en algún momento.
- Periódico si el resto nunca es cero pero se repite.

El periodo es la cifra o grupo de cifras que se repiten en el cociente.

1:4=0,25	decimal exacto.
5:3=1,666…	decimal periódico, el periodo es 6.
13:22=0,59090…	decimal periódico, el periodo es 90

Separador decimal

Debe usarse la coma para separar la parte entera de la parte decimal de un número, aunque se admite el punto y se usa en muchos países.
El punto como separador está en la mayoría de las calculadoras.
Nunca se usará la coma alta o apóstrofe.



Prohibido dividir entre cero

Porque dividir es repartir y no tiene sentido repartir entre nada.

No confundas:

- 0:1=0
- 1:0 no tiene sentido

Pero, ¿qué pasaría si dividimos entre números muy cercanos a cero?

1: 0,00000000000000001=10000000000000000

1: 0,0000000000000000000000001=1000000000000000000000000

¡Se obtienen números muy grandes!

Sistemas de medidas

Las distintas unidades para medir se fijaron con el Sistema Internacional de medidas que es habitual en casi todos los países.
En muchos países aún se emplean otras unidades, como millas o galones o libras en los países anglosajones. Pero estas medidas no siempre son iguales, como los galones en el Reino Unido (4,5 l aprox.) y en Estados Unidos (3,75 l aprox.). ¿Te imaginas los líos y las confusiones?

Recuerda lo más importante

Números decimales

- Los **números decimales** tienen una parte entera y una parte decimal. En la parte decimal están las décimas, centésimas, milésimas,...
- Para **ordenarlos** se compara la parte entera y, si ésta coincide, se compara la parte decimal empezando por las décimas, y si ésta coincide se comparan las centésimas...

  Un número no cambia si se añaden ceros a la derecha de su parte decimal.
- **Redondear** un número es sustituir sus últimas cifras por ceros pero observando la primera cifra que se sustituye por si hay que añadir una unidad a la cifra anterior.

  Los números decimales se representan en la recta numérica.

Operaciones con decimales

- Para **sumar** y **restar** dos números, si es preciso se añaden ceros en la parte decimal para que los dos tengan el mismo número de cifras decimales.

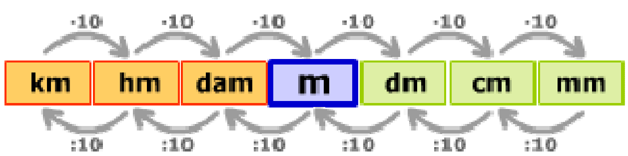
  $1{,}5+0{,}03=1{,}50+0{,}03=1{,}53$ $1{,}5-0{,}03=1{,}50-0{,}03=1{,}47$
- Para **multiplicar** dos números, se realiza como si no hubiese decimales y el resultado tendrá tantos decimales como la suma de cifras decimales de los dos factores.

  $$1{,}5\cdot 0{,}03=0{,}045$$
- Para **dividir** dos números, si es preciso se añaden ceros en la parte decimal para que los dos tengan el mismo número de cifras decimales.

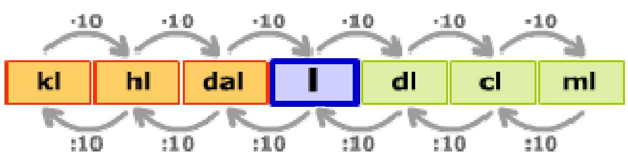
  $$1{,}5:0{,}03=1{,}50:0{,}03=150:3=50$$

Sistema Métrico Decimal

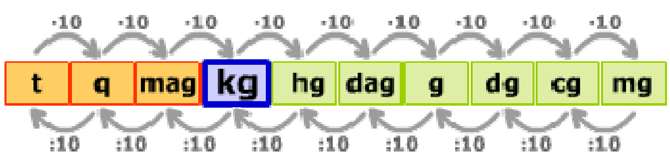
- Unidades de **longitud**



- Unidades de **capacidad**



- Unidades de **peso**



Autoevaluación

1. Ordena de menor a mayor los siguientes números:

6,488, 6,5 y 6,49.

2. Escribe el número que se corresponde con 72 unidades 79 décimas 87 centésimas y 63 milésimas.

3. Redondea a las milésimas el número 58,8796.

4. ¿Cuál es el número decimal representado con la letra P:

5. Completa: 8,403+$\boxed{}$=212,14

6. Efectúa: 6,7+0,1·(0,7+2,4:100)=

7. Completa: 444:$\boxed{}$=44400

8. Se compraron 3,605 kg de fruta a 1,45 € el kg. ¿Cuánto se debe pagar?

El resultado sólo debe tener dos cifras decimales redondeadas.

9. De un depósito lleno con 19 dal se extraen 51 botellas de 61 cl cada una. ¿Cuántos litros quedan en el depósito?

10. ¿Cuántos pasos de 84 cm cada uno deberá dar una persona para recorrer 8,988 km?

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) 49–0,045=48,955

b) 0,5+4=4,5

c) 7,52–3,7=3,82

d) 0,97–0,001=0,969

2. a) 63+1,20+0,59=64,79

b) 520–28,0-29=492-29=463

c) 730–56,1-7,3=673,9-7,3=666,6

d) 33–164,3+0,07=–131,3+0,07=
=–131,23

3. a) 5·8,6·0,001=43,0·0,001=0,043

b) 30·1,1:0,01=33,0:0,01=3300

c) 9,8·9,8:0,1=96,12:0,1=961,2

d) 1,9·0,09·0,01=0,171·0,01=
=0,00171

4. a) 0,39+4,2·(0,3+6)=
=0,39+4,2·6,3=0,39+26,46=26,85

b) 62–3,8·(0,33+8,4)=
=62–3,8·8,73=62–33,174=28,826

c) 0,2–0,8·(20+980)=
=0,2–0,8·1000=0,2-800=–799,8

d) 1,4–0,4·(0,25+75)=
=1,4–0,4·75,25=1,4-30,1=–28,7

5. 10–(12·0,10+14·0,15)=
=10–(1,20+2,10)=10–3,30=6,70 €

6. 5·15·0,175+0,15=75·0,175+0,15=
=13,125+0,15=13,275 m

7. 45–888·(4,2:100)=45–888·0,042=
=45–37,296=7,704≈8 litros

8. 57:0,25+(124-57):0,5=228+67:0,5=
=228+134=362 botellas

9. 0,68:500=0,00136 mm
0,884:500=0,001768 g

10. (0,471–0,149):35·(35–26)=
0,322:35·9=0,0092·9=0,0828 kg

11. 72:1,8=40·granos en 1 dg
40·10000=400000 granos en 1 kg

12. 58,78 hl=5878 l=5878 kg=5,878 t

13. (43:0,05)·3,92=860·3,92=3371,20 g=
=3,3712 g

14. 2·(60:5)=24 ml en 1 minuto.
24·12=144 ml en 1 hora.
144·24=3456 ml en 1 día.
3456·7=24192 ml en 1 semana
24192=24,192 l en 1 semana.

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 6,488<6,49<6,5

2. 72+7,9+0,87+0,063=80,833

3. 58,880

4. 5,9

5. 212,14–8,403=203,737

6. 6,7+0,1·0,724=6,7+0,0724=6,7724

7. 0,01

8. 3,605·1,45=5,22725≈5,23 €

9. 190–6,1·5,1=190–31,11=158,89 litros

10. 8,988·100000:84=898800:84=
=10700 pasos

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

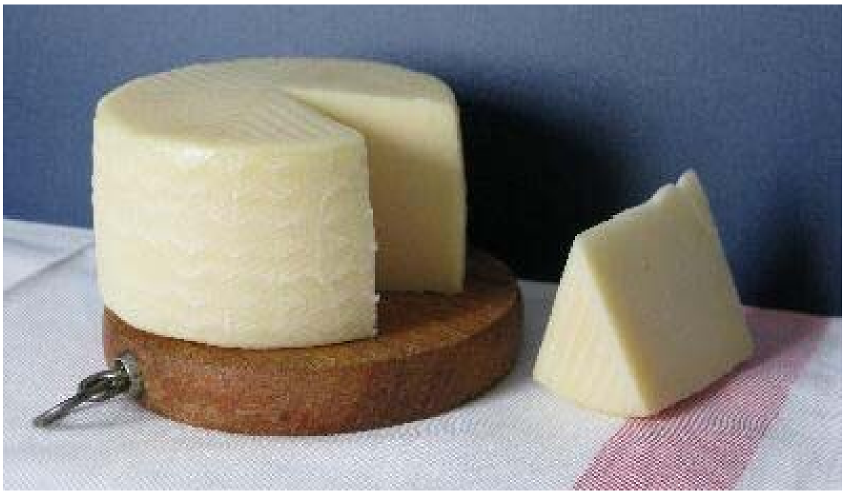
5 Fracciones

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Conocer el valor de una fracción.
- Identificar las fracciones equivalentes.
- Simplificar una fracción hasta la fracción irreducible.
- Pasar fracciones a números decimales.
- Sumar fracciones.
- Restar fracciones.
- Multiplicar fracciones.
- Dividir fracciones.
- Resolver problemas utilizando fracciones.

Antes de empezar



En nuestro lenguaje habitual, utilizamos expresiones como éstas:

"Me queda la mitad".

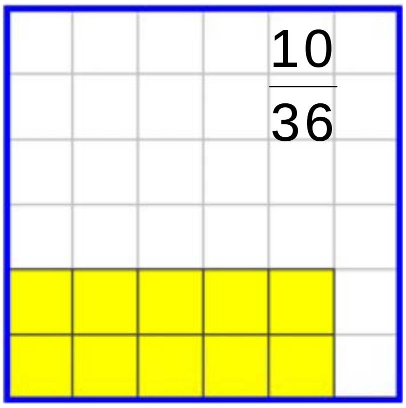
"Falta un cuarto de hora".

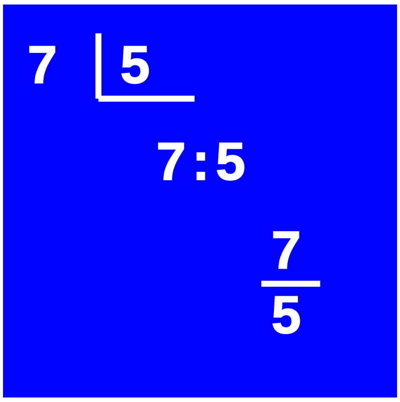
"Tengo un décimo".

"Caben tres cuartos de litro".

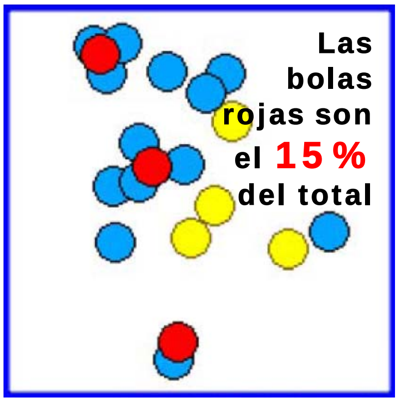
"Está al ochenta y cinco por ciento de su capacidad".

En estas expresiones estamos utilizando fracciones. Por tanto el empleo de fracciones es tan antiguo como nuestro lenguaje.





- Una fracción nos sirve para expresar cantidades en cosas partidas en partes iguales.
- Una fracción nos sirve para expresar el valor numérico resultado de una división.
- Una fracción nos sirve para expresar la razón que guardan dos magnitudes proporcionales.
- Una fracción aplicada a un número actúa como operador.
- Una fracción también es el tanto por ciento.



En esta quincena aprenderás a expresarlas matemáticamente, a reconocer su valor numérico y a hacer las operaciones básicas con ellas.

1. Concepto de fracción

Definición y elementos de una fracción

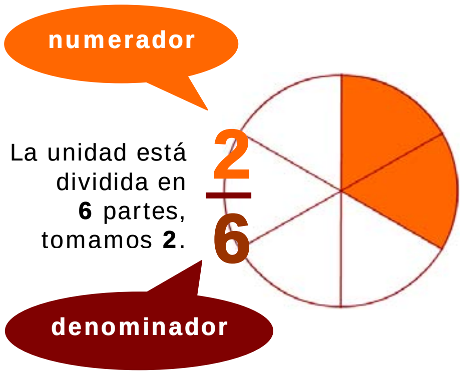
Una fracción expresa un valor numérico. Sabemos que los números naturales expresan cantidades referidas a objetos enteros, las fracciones expresan cantidades en las que los objetos están partidos en partes iguales.

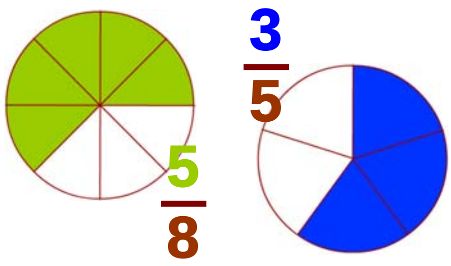
Una fracción es el cociente de dos números. Es decir, es una división sin realizar.

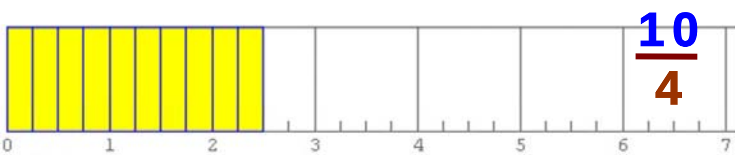
Una fracción expresa el valor o número que resulta al realizar esa división.

Los elementos que forman la fracción son:

- **El numerador.** Es el número de arriba, indica las partes que tenemos.
- **El denominador.** Es el número de abajo, indica el número de partes en que dividimos a cada unidad.
- **La raya de fracción.** Es una raya horizontal que los separa







Otra forma de representar una fracción.

Cómo se lee una fracción

Primero se lee el numerador como cualquier número, después se lee el denominador de esta manera:

- Si es el 1 se lee enteros.
- Si es el 2 se lee medios.
- Si es el 3 se lee tercios.
- Si es el 4 se lee cuartos.
- Si es el 5 se lee quintos.
- Si es el 6 se lee sextos.
- Si es el 7 se lee séptimos.
- Si es el 8 se lee octavos.
- Si es el 9 se lee novenos.
- Si es el 10 se lee décimos.
- Si es más de 10 se lee el número terminado en "avos". Ejemplo: onceavos, doceavos, treceavos, ...
- Si es una potencia de 10 se lee el número terminado en "ésimas". Ejemplo: centésimas, milésimas, diezmilésimas, ...

$\frac{2}{6}$ dos sextos

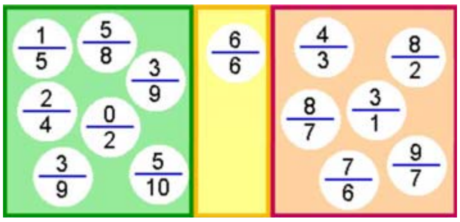
tres quintos $\frac{3}{5}$

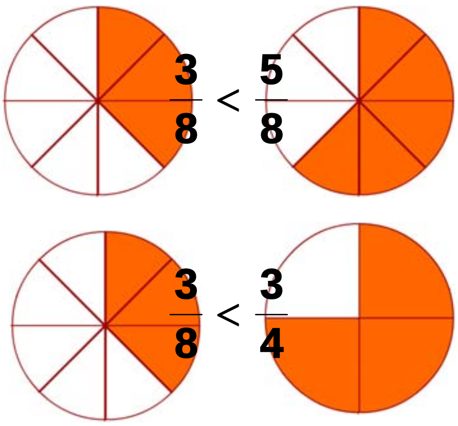
$\frac{5}{8}$ cinco octavos

$\frac{12}{15}$ doce quinceavos

siete centésimas $\frac{7}{100}$

El valor de una fracción





Puesto que una fracción representa una división, para saber cuál es el valor de una fracción deberíamos realizar esa división.

No obstante podemos apreciar el valor de una fracción si nos fijamos en su numerador y su denominador.

- Si el numerador es más pequeño que el denominador, entonces la fracción vale menos de 1.
- Si el numerador es igual al denominador, entonces la fracción vale 1.
- Si el numerador es mayor que el denominador, entonces la fracción vale más de 1.

Su valor será más grande cuanto mayor tenga el numerador, y será más pequeño cuanto mayor tenga el denominador.

Pasar una fracción a un decimal

$$\frac{12}{4} = 12 : 4 = 3$$

$$\frac{42}{8} = 42 : 8 = 5{,}25$$

$$\frac{7}{3} = 7 : 3 = 2{,}333333\ldots$$

Para pasar una fracción a un número decimal se divide el numerador entre el denominador.

- Hay divisiones cuyo resultado en un número natural.
- Otras divisiones su resultado es un número decimal con algunas cifras decimales.
- Otras divisiones su resultado es un decimal periódico, que tiene un grupo de cifras decimales que se repiten y por muchas cifras decimales que saquemos no se llega a tener de resto 0.

Pasar un decimal a fracción

$$0{,}047 = \frac{47}{1000}$$

$$3{,}21 = \frac{321}{100}$$

$$7 = \frac{7}{1}$$

Para escribir un **número decimal no periódico** en forma de fracción se pone de numerador el número sin la coma y de denominador el 1 seguido de tantos 0 como cifras decimales tenga el número decimal.

- Un número natural equivale a una fracción cuyo numerador es ese número y cuyo denominador es 1.

2. Fracciones equivalentes

Fracciones equivalentes, número racional

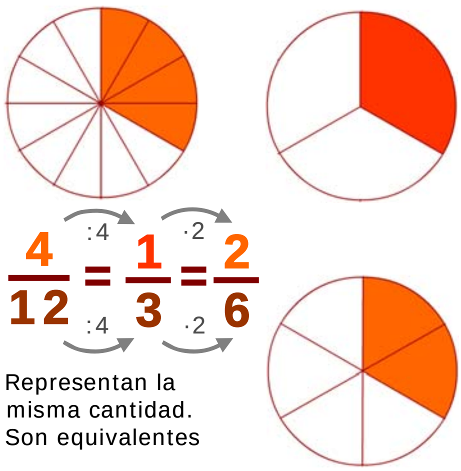
Una fracción representa una división, sabemos que hay diversas divisiones que dan el mismo resultado, valen lo mismo.

Las fracciones equivalentes tienen distinto numerador y denominador, pero valen lo mismo.

Cada fracción tiene infinitas fracciones equivalentes a ella.

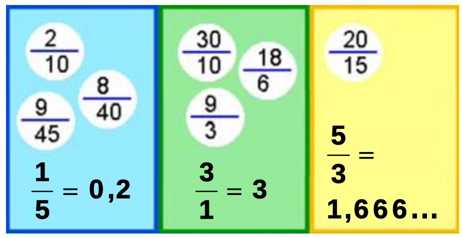
Para obtener otra fracción equivalente a una dada nos basta con multiplicar o dividir sus términos por el mismo número.

- Un **número racional** es todo valor que puede ser expresado mediante una fracción. Todas las fracciones equivalentes entre sí expresan el mismo número racional.



$$\frac{4}{12} \xrightarrow{:4} \frac{1}{3} \xrightarrow{\cdot 2} \frac{2}{6} \qquad \frac{4}{12}=\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$$

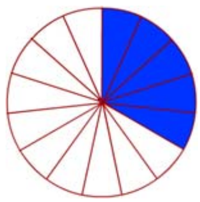
Representan la misma cantidad. Son equivalentes



Productos cruzados

Para comprobar si dos fracciones son equivalentes o no, el método más fácil es el de los productos cruzados.

Multiplicamos sus términos en aspa: El producto del numerador de una fracción por el denominador de la otra ha de dar lo mismo en ambos casos.



$$\frac{5}{15}=\frac{2}{6}$$

$$6\cdot 5=30$$

$$2\cdot 15=30$$

Simplificar una fracción

Todas las fracciones equivalentes entre sí representan el mismo valor. Por tanto, nos interesa emplear la fracción más simple, ésa será la que tenga el numerador y denominador más pequeños.

A esa fracción se le llama **fracción irreducible** porque ya no se puede simplificar más.

Nos valemos de la propiedad fundamental de la división. Sabemos que si multiplicamos o dividimos al numerador y al denominador por el mismo número obtenemos otra fracción equivalente.

Para simplificar una fracción debemos buscar un número que sea **divisor** del numerador y del denominador para dividirlos por él. Nos interesa dividirlos por el número mayor posible, ese número es el **máximo común divisor** de ambos, así, de una sola vez, habremos llegado a la fracción irreducible.

$$\frac{4}{12} \xrightarrow{:2} \frac{2}{6} \xrightarrow{:2} \frac{1}{3} \qquad \frac{4}{12}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

irreducible

$$\frac{24}{60}=\frac{12}{30}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

$$\frac{84}{126}=\frac{7\cdot 3\cdot 2\cdot 2}{7\cdot 3\cdot 3\cdot 2}=\frac{2}{3}$$

m.c.d.(153,261)=9

153:9=17

261:9=29

$$\frac{153}{261}=\frac{17\cdot 9}{29\cdot 9}=\frac{17}{29}$$

EJERCICIOS resueltos

1. Ordena de mayor a menor estas fracciones:

$\frac{3}{7}, \frac{9}{4}, \frac{8}{8}, \frac{2}{5}$ Solución: $\frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{8}{8} < \frac{9}{4}$

2. Cada fracción de abajo es equivalente a otra de arriba, colócalas juntas.

$\frac{9}{3}, \frac{7}{49}, \frac{6}{4}, \frac{9}{1}, \frac{8}{8}, \frac{10}{6}$ Solución: $\frac{9}{3} = \frac{21}{7}$ $\frac{7}{49} = \frac{8}{56}$ $\frac{6}{4} = \frac{9}{6}$

$\frac{3}{3}, \frac{45}{5}, \frac{21}{7}, \frac{40}{24}, \frac{8}{56}, \frac{9}{6}$ $\frac{8}{8} = \frac{3}{3}$ $\frac{10}{6} = \frac{40}{24}$ $\frac{9}{1} = \frac{45}{5}$

3. Escribe el término que falta en estas fracciones equivalentes.

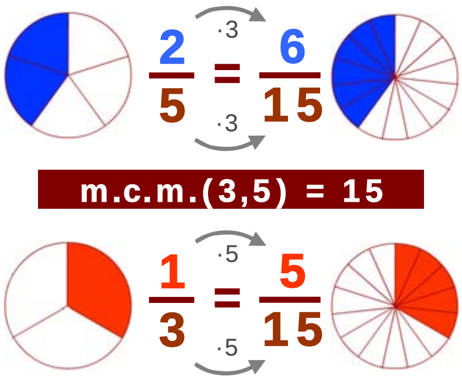
a) $\frac{2}{6} = \frac{5}{x}$ $6 \cdot 5 = 30$ $x = 30 : 2 = 15$ b) $\frac{2}{6} = \frac{x}{24}$ $2 \cdot 24 = 48$ $x = 48 : 6 = 8$

4. Simplifica hasta obtener la fracción irreducible:

a) $\frac{24}{60}$ m.c.d.(24,60)=12 se divide numerador y denominador por 12 → $\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$

b) $\frac{70}{42}$ m.c.d.(70,42)=14 se divide numerador y denominador por 14 → $\frac{70}{42} = \frac{5}{3}$

c) $\frac{112}{168}$ m.c.d.(112,168)=56 se divide numerador y denominador por 56 → $\frac{112}{168} = \frac{2}{3}$



$\frac{3}{10}$ $\frac{7}{12}$ $\frac{4}{15}$

$6=2\cdot3$ $12=2^2\cdot3$ $15=3\cdot5$

$\text{m.c.m.}(6,12,15) = 2^2\cdot3\cdot5 = 60$

$60:10=6$ $\frac{3}{10} = \frac{3\cdot6}{60} = \frac{18}{60}$

$60:12=5$ $\frac{7}{12} = \frac{7\cdot5}{60} = \frac{35}{60}$

$60:15=4$ $\frac{4}{15} = \frac{4\cdot4}{60} = \frac{16}{60}$

3. Operaciones con fracciones

Paso de fracciones a común denominador

No es lo mismo tener mitades que tener tercios. Cuando sumamos lo hacemos de elementos homogéneos, tienen que ser cantidades de la misma cosa. Para sumar o restar fracciones es necesario que tengan todas el mismo denominador.

Para pasar fracciones a **común denominador** el método más adecuado es el del mínimo común múltiplo de los denominadores, se siguen estos pasos:

1. Se busca el mínimo común múltiplo de los denominadores y se pone de denominador de cada una.
2. Para hallar cada uno de los nuevos numeradores se divide ese número por el denominador de la fracción y se multiplica por su numerador.

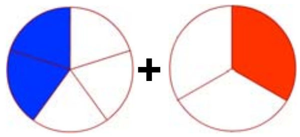
Suma de fracciones

Para sumar fracciones es necesario que tengan todas el mismo denominador.

Si ya tienen igual denominador se pueden sumar directamente.

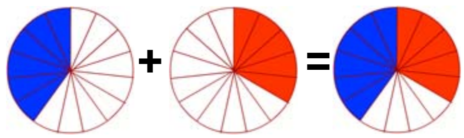
El denominador será el mismo y el numerador será la suma de los numeradores.

Si las fracciones tienen distintos denominadores se pasan a común denominador, es decir, se cambian por otras equivalentes a ellas pero con el mismo denominador todas, y ya se pueden sumar.



$\frac{2}{5}=\frac{6}{15} \qquad \frac{1}{3}=\frac{5}{15}$

m.c.m.(3,5) =15



$$\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{6+5}{15}=\frac{11}{15}$$

Sumas y restas de fracciones

Cuando tenemos juntas sumas y restas seguimos el mismo proceso que si tuviéramos solamente sumas:

- Se ponen todas con el mismo denominador.
- Se escribe otra fracción con el mismo denominador y el numerador la suma o resta de los denominadores.
- Se simplifica la fracción resultante si se puede.

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=$$

m.c.m.(3,5,6)=30

$$\frac{18}{30}+\frac{20}{30}-\frac{5}{30}=\frac{18+20-5}{30}=$$

$$=\frac{33}{30}=\frac{11}{10}$$

EJERCICIOS resueltos

5. Reduce a común denominador las fracciones: $\frac{5}{12}, \frac{3}{15}, \frac{11}{45}$

$12=2^2\cdot 3 \quad 15=3\cdot 5 \quad 20=3^2\cdot 5 \qquad$ m.c.m. (12, 15, 45) = $2^2\cdot 3^2\cdot 5$

$180:12=15 \quad \frac{5}{12}=\frac{5\cdot 15}{180}=\frac{75}{180} \qquad 180:15=12 \quad \frac{3}{15}=\frac{3\cdot 12}{180}=\frac{36}{180} \qquad 180:45=4 \quad \frac{11}{45}=\frac{44}{180}$

6. Calcula:

a) $\frac{10}{6}+\frac{3}{8}+\frac{4}{9}=$ Denominador común: m.c.m.(6, 9, 8)=72

$$\frac{10}{6}+\frac{3}{8}+\frac{4}{9}=\frac{120}{72}+\frac{27}{72}+\frac{32}{72}=\frac{179}{72}$$

b) $\frac{1}{6}-\frac{3}{18}+\frac{5}{9}=$ Denominador común: m.c.m.(6, 18, 9)=54

$$\frac{1}{6}-\frac{7}{18}+\frac{5}{9}=\frac{9}{54}-\frac{21}{54}+\frac{30}{54}=\frac{18}{54}=\frac{1}{3}$$

c) $\frac{4}{7}+\frac{5}{6}-\frac{4}{3}=$ Denominadopr común: m.c.m.(7, 6, 3) = 42

$$\frac{4}{7}+\frac{5}{6}-\frac{4}{3}=\frac{24}{42}+\frac{35}{42}-\frac{56}{42}=\frac{3}{42}=\frac{1}{14}$$

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 7} = \frac{15}{56}$$

Multiplicación de fracciones

Para multiplicar fracciones no hace falta pasarlas a común denominador, se multiplican directamente.

- Multiplicamos sus numeradores y lo ponemos de numerador, multiplicamos sus denominadores y lo ponemos de denominador.

$\frac{5}{9}$ **inversas** $\frac{9}{5}$

$$\frac{5}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{5 \cdot 9}{9 \cdot 5} = 1$$

Fracción inversa de una fracción.

La inversa de una fracción es otra fracción que al ser multiplicada por ella da la fracción unidad.

- La fracción que tiene el numerador y denominador intercambiados respecto de ella, es su fracción inversa.

Lógicamente, si una fracción es inversa de otra, también son sus inversas todas las equivalentes a esa.

La fracción de valor 0 es la única que no tiene inversa.

$$\frac{7}{2} : \frac{5}{9} = \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{5} = \frac{63}{10}$$

También puedes hacerlo así:

Multiplicando en “aspa”: $\frac{7}{2} : \frac{5}{9} = \frac{7 \cdot 9}{2 \cdot 5} = \frac{63}{10}$

División de una fracción por otra.

- **Dividir** una fracción por otra es lo mismo que **multiplicar** la primera fracción **por la inversa** de la segunda fracción.

Una fracción se puede dividir por cualquier otra, menos por la fracción 0

EJERCICIOS resueltos

7. Multiplica:

a) $\frac{6}{5} \cdot \frac{7}{9} =$ Solución: $\frac{6 \cdot 7}{5 \cdot 9} = \frac{42}{45} = \frac{14}{15}$

b) $3 \cdot \frac{5}{6} =$ Solución: $\frac{3 \cdot 5}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$

8. Divide:

a) $\frac{6}{8} : \frac{7}{3} =$ Solución: $\frac{6}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{18}{56} = \frac{9}{28}$

b) $5 : \frac{2}{3} =$ Solución: $5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$

c) $\frac{6}{7} : 3 =$ Solución: $\frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{7 \cdot 3} = \frac{2}{7}$

9. Calcula:

a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} : \frac{9}{7}$ Solución: $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{9} = \frac{42}{180} = \frac{7}{30}$

Operaciones combinadas

Para resolver operaciones combinadas debemos tener en cuenta estas indicaciones:

- La misión de los paréntesis es la de unir o "empaquetar" aquello a lo que afectan.
- Los signos de multiplicar unen más que los de sumar y restar, es decir, cuando dos números están unidos por el signo de multiplicar forman un bloque inseparable.
- Para poder sumar o restar dos números deben estar sueltos, no podemos sumar dos números si uno de ellos está unido por el otro lado a otra expresión mediante un signo de multiplicar.
- Las operaciones combinadas se resuelven en varios pasos, todo lo que no se resuelva en un paso se debe copiar otra vez tal como estaba, sin olvidarlo ni cambiarlo de posición.

Como norma general es aconsejable comenzar resolviendo lo del interior de paréntesis, seguir luego con las multiplicaciones y terminar realizando las sumas y restas que queden.

Por eso, antes de comenzar a resolver operaciones combinadas debemos observar la expresión y plantearnos una estrategia a seguir, lo que vamos a hacer antes y después.

$$\frac{5}{3}-\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\right)+\frac{7}{10}=$$

1º) los paréntesis:

$$=\frac{5}{3}-\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}+\frac{3}{6}\right)+\frac{9}{10}=$$

$$=\frac{5}{3}-\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{6}+\frac{9}{10}=$$

2º) las multiplicaciones o divisiones:

$$=\frac{5}{3}-\frac{32}{30}+\frac{9}{10}=$$

3º) las sumas y restas:

m.c.m(3,30,10)=30

$$=\frac{50}{30}-\frac{32}{30}+\frac{27}{30}=\frac{45}{30}=$$

4º) se simplifica si se puede:

$$=\frac{3}{2}$$

EJERCICIOS resueltos

10. Calcula:

a) $\frac{1}{8}+\boxed{\frac{11}{4}\cdot 6}+\frac{3}{5}=\frac{1}{8}+\frac{66}{4}+\frac{3}{5}=\frac{5}{40}+\frac{660}{40}+\frac{24}{40}=\frac{689}{40}$

b) $\boxed{\frac{1}{8}\cdot\frac{5}{2}}+\boxed{\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{5}{16}+\frac{21}{12}=\frac{15}{48}+\frac{84}{48}=\frac{99}{48}=\frac{33}{16}$

c) $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cdot\left(6+\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{8}+\boxed{\frac{1}{4}\cdot\frac{33}{5}}=\frac{1}{8}+\frac{33}{20}=\frac{5}{40}+\frac{66}{40}=\frac{71}{40}$

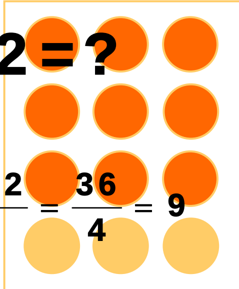
d) $\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right):\left(6-\frac{3}{5}\right)=\left(\frac{1}{8}+\frac{2}{8}\right):\left(\frac{30}{5}-\frac{3}{5}\right)=\frac{3}{8}:\frac{27}{5}=\frac{3\cdot 5}{27\cdot 8}=\frac{5}{72}$

e) $\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{5}{2}+\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{10}{6}+\frac{14}{6}\right)\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{8}\cdot\frac{24}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{24\cdot 3}{8\cdot 6\cdot 4}=\frac{3}{8}$

4. Problemas con fracciones

Calcular la parte de un número

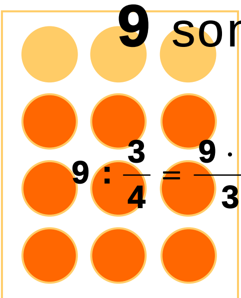
$\frac{3}{4}$ de 12 = ?



$$\frac{3}{4}\cdot 12=\frac{3\cdot 12}{4}=\frac{36}{4}=9$$

Calcular un número conocida la parte

9 son $\frac{3}{4}$ de ?



$$9:\frac{3}{4}=\frac{9\cdot 4}{3}=\frac{36}{3}=12$$

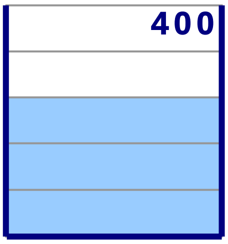
Ahora que ya conoces los significados de las fracciones y la manera de realizar con ellas las cuatro operaciones básicas, te será fácil resolver problemas utilizándolas.

Debes considerar que una fracción es simplemente un valor numérico.

- Lee atentamente el enunciado del problema.
- Fíjate qué cosa es lo que te pide que calcules.
- Mira los datos con los que cuentas.
- Haz un dibujo o esquema del problema
- Decide las operaciones que debes realizar hasta llegar al resultado.
- Resuélvelo con orden.
- Pon las unidades en el resultado, es decir de qué cosa es.
- Observa el resultado, mira si es un resultado lógico o no. Puede ser que en algo te hayas confundido.

EJEMPLO 1

¿Cuántos litros de agua contiene un depósito de 400 litros que está ocupado en sus 3/5 partes?



✓ Hay que calcular los $\frac{3}{5}$ de 400

Contiene $\frac{3}{5}\cdot 400=\frac{3\cdot 400}{5}=240$ litros

EJEMPLO 2

Un depósito contiene 320 litros de agua y está lleno las dos terceras partes. ¿Qué capacidad tiene?.

✓ Los $\frac{2}{3}$ del TOTAL son 320 litros,

luego el total es $\frac{320\cdot 3}{2}=480$ litros

EJEMPLO 3

María leyó la semana pasada la mitad de un libro y esta semana la tercera parte, pero aún le faltan 30 páginas, ¿cuántas páginas tiene el libro?.

✓ $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

Si ha leído las 5/6 partes le falta una sexta parte

$\frac{1}{6}$ del TOTAL son 30 páginas, luego el libro tiene

30·6=180 páginas

Para practicar

1. Calcula:

a) $\frac{5}{6}+\frac{7}{9}+\frac{4}{3}$ b) $\frac{5}{6}+\frac{7}{9}-\frac{1}{3}$

c) $\frac{2}{3}+\frac{11}{15}-\frac{1}{5}$ d) $\frac{8}{12}+\frac{2}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{10}$

2. Calcula:

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{14}$ b) $\frac{4}{3}:\frac{7}{11}$

c) $6\cdot\frac{5}{4}$ d) $\frac{4}{3}:6$

3. Calcula:

a) $\frac{6}{7}\cdot\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{8}\right)$ b) $\left(8+\frac{2}{5}\right):\left(6-\frac{9}{4}\right)$

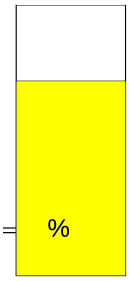
c) $\frac{7}{9}:\frac{4}{3}+\frac{8}{12}\cdot\frac{2}{5}$ d) $\frac{8}{12}+\frac{2}{5}:\frac{6}{7}$

e) $\frac{5}{6}+\frac{7}{9}\cdot\frac{4}{3}-\frac{1}{2}$ f) $\frac{5}{6}+\frac{7}{9}\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right)$

4. Expresa en % el contenido de este depósito respecto de su capacidad total.

Para ello mide con la regla. Es conveniente que la medida la hagas en milímetros para que sean números naturales.

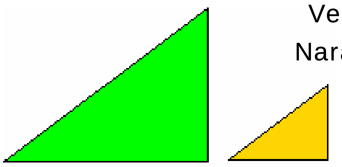
$$\frac{\text{Altura del líquido}}{\text{Altura del depósito}} = \frac{\quad}{\quad} = \quad\%$$



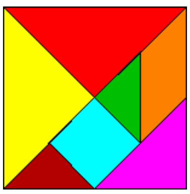
5. Halla la razón de semejanza entre estos triángulos.

Elige un tipo de lado, por ejemplo el lado mayor y mídelo en los dos triángulos. Sólo puedes emplear números naturales.

$$\frac{\text{Verde}}{\text{Naranja}} = \frac{\quad}{\quad}$$



6. Expresa la fracción de cuadrado que ocupa cada pieza de este tangram.



7. En una bolsa de 24 bolas, las bolas blancas son 1/4 de ellas. Sin sacar ninguna, ¿cuántas bolas blancas debo añadir para conseguir que las blancas fuesen la mitad?

8. Un coche lleva circulando 26 minutos, en los cuales ha recorrido 2/3 de su trayecto. ¿Cuánto tiempo empleará en recorrer todo el trayecto, yendo siempre a la misma velocidad?

9. Una pelota, al caer al suelo rebota hasta los 3/8 de la altura desde la que se la suelta. Si se la deja caer desde 1024 cm, ¿a qué altura llegará tras el tercer bote?

10. En un pinar de 210 pinos se talaron sus 3/5 partes, poco después hubo un incendio, en el que se quemaron los 5/7 de los pinos que quedaban. ¿Cuántos pinos sobrevivieron?

11. La familia de Oscar gasta 1/3 de su presupuesto en vivienda y 1/5 en alimentación. ¿Qué fracción del presupuesto queda para otros gastos? Sus ingresos mensuales son de 2235 euros. ¿Cuánto pagarán por la vivienda?

12. Un ciclista tiene que recorrer 18 km que separan dos pueblos. Si han recorrido 2/3 ¿Cuántos km le faltan todavía?

13. Cada paso de Eva mide aproximadamente 3/5 de metro. ¿Cuántos pasos dará para recorrer 6 km?

14. Una empresa quiere embotellar 912 litros de zumo de naranja, si cada botella tiene una capacidad de 2/3 de litro, ¿cuántas botellas necesitará?

15. La relación entre lo ancho y lo alto de una pantalla tradicional es 4/3. Calcula lo que debería medir de alto una pantalla cuya anchura es 112 cm.

Para saber más

Desde siempre el hombre ha utilizado palabras para indicar particiones de una cosa, pero la forma de expresar por escrito en lenguaje matemático esas fracciones ha cambiado, se ha mejorado.

En la antigüedad no se conocían buenos sistemas de numeración, por ello las fracciones recibieron durante mucho tiempo notaciones poco claras e inadecuadas para las aplicaciones prácticas.

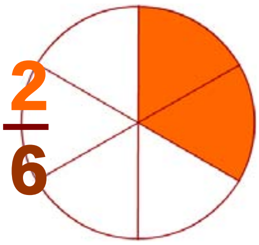
Los egipcios solamente utilizaban fracciones unitarias, es decir de numerador 1. Los babilonios fueron los primeros en utilizar una notación racional expresando los números de forma algo más parecida a la actual.

La expresión de una fracción poniendo el numerador arriba y el denominador abajo se la debemos a los hindúes, pero ellos no ponían entre ambos la raya horizontal que ponemos en la actualidad, esa raya se la debemos a los árabes.

Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci (1175-1240) contribuyó mucho en extender a Europa en el siglo XIII los conocimientos matemáticos de los árabes.

Busca información sobre este extraordinario matemático.

Recuerda lo más importante



- **Las fracciones** expresan cantidades en las que los objetos están partidos en partes iguales.

  El numerador indica las partes que tenemos.

  El denominador indica las partes en que dividimos a la unidad.

$$\frac{3}{5} = 3 : 5 = 0{,}6$$

$$1{,}23 = \frac{123}{100}$$

- Una **fracción representa un valor**, es el resultado de la división del numerador entre el denominador.

  Para pasar una **fracción a número decimal** se hace la división.

  Para pasar de número **decimal a fracción** ponemos de numerador el número sin la coma y de denominador el 1 con tantos 0 como cifras decimales tuviera el número decimal.

- **Fracciones equivalentes** son las que expresan el mismo valor. Llamamos **fracción irreducible** a la más simple de ellas.

Irreducible

$$\frac{21}{12} = \frac{70}{40} = \frac{28}{16} = \frac{7}{4} = \frac{14}{8}$$

  Número racional es todo valor que puede ser expresado mediante una fracción. Todas las fracciones equivalentes entre sí son el mismo **número racional**.

- Para **simplificar una fracción** se divide el numerador y el denominador por el mismo número.

$$\frac{84}{18} = \frac{84:6}{18:6} = \frac{14}{3}$$

- Para **sumar** y para **restar** fracciones deben tener el mismo denominador.

  Para pasar fracciones a **común denominador** se busca el mínimo común múltiplo de los denominadores, y se pone de denominador de todas.
  Cada numerador se halla dividiendo el m.c.m. por el denominador de su fracción y multiplicándolo por el numerador.
  Finalmente se suman o se restan los numeradores y se pone el mismo denominador.

$$\frac{5}{4} - \frac{1}{6} = \frac{\quad}{12} - \frac{\quad}{12} =$$

m.c.m.(4,6)=12
12:4=3 5·3=15
12:6=2 2·1=2

$$= \frac{15}{12} - \frac{2}{12} =$$

$$= \frac{15-2}{12} = \frac{13}{12}$$

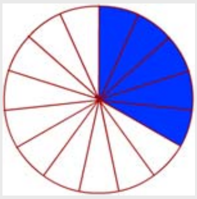
- La **multiplicación** de fracciones se hace directamente, numerador por numerador y denominador por denominador.

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{12}{35}$$

- Para **dividir** una fracción por otra se multiplica por la inversa.

$$\frac{4}{5} : \frac{3}{7} = \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{28}{15}$$

Autoevaluación



1. ¿A qué fracción corresponde la representación gráfica de la izquierda?

2. Pon un denominador a cada una de estas fracciones:

$\frac{16}{\quad} < 1$ $\qquad$ $\frac{43}{\quad} = 1$ $\qquad$ $\frac{29}{\quad} > 1$

3. ¿Qué fracción equivale al número decimal 7,96?

4. Simplifica esta fracción hasta hacerla irreducible.

$$\frac{7}{168} = \underline{\qquad}$$

5. Pon el término que falta para que estas fracciones sean equivalentes.

$$\frac{11}{\quad} = \frac{44}{56}$$

6. Calcula:

$$\frac{6}{5} + \frac{7}{15} = \underline{\qquad}$$

7. Calcula:

$$\frac{16}{17} - \frac{7}{8} = \underline{\qquad}$$

8. Calcula:

$$\frac{9}{10} \cdot \frac{11}{7} = \underline{\qquad}$$

9. Escribe la fracción inversa de:

$$\frac{7}{12}$$

10. Calcula:

$$\frac{3}{25} : \frac{6}{5} = \underline{\qquad}$$

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) $\frac{53}{18}$ b) $\frac{5}{18}$

c) $\frac{43}{9}$ d) $\frac{7}{15}$

2. a) $\frac{5}{7}$ b) $\frac{44}{21}$

c) $\frac{15}{2}$ d) $\frac{2}{9}$

3. a) $\frac{9}{4}$ b) $\frac{56}{25}$

c) $\frac{17}{20}$ d) $\frac{17}{15}$

e) $\frac{37}{27}$ f) $\frac{40}{27}$

4. Está al 72%

5. Están en razón $\frac{1}{2}$

6. Amarillo, rojo $\frac{1}{4}$, marrón, verde $\frac{1}{16}$,

Azul, naranja, fucsia $\frac{1}{8}$

7. Debo añadir 12 bolas blancas.

8. Tardará 39 minutos.

9. Llegará a 54 cm de altura.

10. Sobrevivieron 24 pinos.

11. Para otros gastos quedan $\frac{7}{15}$ del presupuesto.

En vivienda gastan 745 €.

12. Le faltan 6 km.

13. 10000 pasos.

14. 1368 botellas.

15. 84 cm de alto.

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. $\frac{5}{15}$

2. 17, 43, 28. por ejemplo

3. $\frac{796}{100}$

4. $\frac{1}{24}$

5. 14

6. $\frac{5}{3}$

7. $\frac{9}{136}$

8. $\frac{99}{70}$

9. $\frac{12}{7}$

10. $\frac{1}{10}$

No olvides enviar las actividades al tutor

6

Proporcionalidad

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Expresar una razón como cociente de dos números.
- Formar proporciones. Dados tres números calcular su cuarto proporcional.
- Identificar magnitudes que son directamente proporcionales.
- Resolver problemas usando reglas de tres directa
- Calcular porcentajes.
- Resolver problemas con porcentajes.

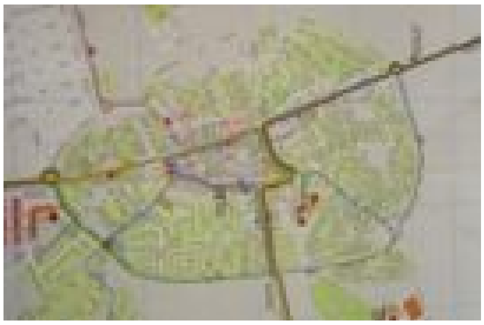
Antes de empezar

Investiga

En época de rebajas seguro que has visto en los escaparates carteles como el de la fotografía. Si la camiseta que te gusta costaba 25 € y nos hacen un descuento del 20% ¿Cuánto ahorrarás? ¿Cuánto pagarás realmente?

Para elaborar esta tarta es necesario mantener las proporciones entre sus ingredientes.

Los mapas deben dibujarse manteniendo las proporciones con la realidad.



1. Razón y proporción

Razón entre dos números

Estamos acostumbrados a dar información sobre situaciones de la vida cotidiana usando números. Hay ocasiones en las que un solo número no es suficiente y debemos compararlo con otra cantidad para poder comprender mejor la situación.

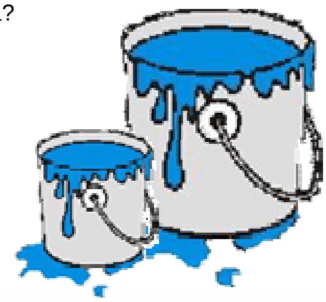
Cuando comparamos dos cantidades formamos una **razón**.

Razón es el **cociente** entre dos números **a** y **b**.
Se escribe **a / b** y se lee "a es a b".

Una razón *no tiene unidades* y sirve para comparar: indica el nº de veces que una cantidad es mayor que otra.

Observa que una razón no es una fracción, en una razón los números pueden ser decimales y en una fracción son enteros.

El bote de pintura grande pesa 4,5 kg y el pequeño 1,5 kg.
¿Cuál es la razón entre el peso del bote grande y el peso del bote pequeño?. ¿Qué indica?



$$\frac{\text{peso bote grande}}{\text{peso bote pequeño}} = \frac{4,5}{1,5} = 3$$

Se lee *"4,5 es a 1,5"*

La razón es 3 y nos indica que el bote grande pesa 3 veces más que el pequeño.

Proporción

Una **proporción** es una igualdad entre dos razones:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

"a es a b como c es a d"

- **a** y **d** se llaman **extremos**
- **b** y **c** se llaman **medios**

Las proporciones cumplen la siguiente relación fundamental:

$$a \cdot d = c \cdot b$$

En una proporción **el producto de medios es igual al producto de extremos.**

Vamos a **comparar razones**

En el cuadro tenemos las horas diarias que dedican Luis y Ana al juego y al estudio.

	Luis	Ana
juego	3 h.	5 h.
estudio	1,5 h.	2,5 h.

$$\frac{\text{tiempo de juego}}{\text{tiempo estudio}} = \frac{5\text{ h}}{2,5\text{ h}} = 2$$

$$\frac{\text{tiempo de juego}}{\text{tiempo estudio}} = \frac{3\text{ h}}{1,5\text{ h}} = 2$$

Tanto Luis como Ana dedican el doble de tiempo al juego que al estudio.

Las dos razones son iguales, forman **proporción**. $\frac{3}{1,5} = \frac{5}{2,5}$

Se lee *"3 es a 1,5 como 5 es a 2,5"*

Cálculo del cuarto proporcional

Dado que el producto de medios es igual al de extremos, podemos calcular cualquier término de una proporción conociendo los otros tres.

- Se llama **cuarto proporcional** al término que desconocemos en una proporción.
  Lo representaremos con la letra **x**.

Observa a la derecha cómo se calcula.

Halla el **cuarto proporcional**:

$\frac{x}{24} = \frac{6}{4}$ $\quad x \cdot 4 = 6 \cdot 24 \quad x = \frac{6 \cdot 24}{4} = \mathbf{36}$

$\frac{7}{2} = \frac{x}{16}$ $\quad 7 \cdot 16 = x \cdot 2 \quad x = \frac{7 \cdot 16}{2} = \mathbf{56}$

$\frac{16}{x} = \frac{8}{7}$ $\quad 16 \cdot 7 = 8 \cdot x \quad x = \frac{16 \cdot 7}{8} = \mathbf{14}$

$\frac{8}{3} = \frac{72}{x}$ $\quad 8 \cdot x = 72 \cdot 3 \quad x = \frac{72 \cdot 3}{8} = \mathbf{27}$

EJERCICIOS resueltos

11. Un rectángulo mide 50 cm de ancho y 20 cm de alto.
Hallar la razón entre su anchura y su altura.
¿Qué nos indica la razón?

Solución:
Calculamos el cociente anchura del rectángulo/altura = 50/20=2.
La razón es 2,5 e indica que la anchura es 2,5 veces la altura

12. Una bolsa grande de magdalenas cuesta 5,2 € y una bolsa pequeña cuesta 1,3 €.
Hallar la razón entre el precio de la bolsa grande y el de la pequeña.
Explica qué indica la razón.

Solución:
Calculamos el cociente precio bolsa grande/precio bolsa pequeña = 5.2/1.3= 4.
La razón es 4 e indica que el la bolsa grande cuesta 4 veces más que la bolsa pequeña.

13. Una chica tiene 15 años y su padre 45.
Hallar la razón entre la edad de la hija y la edad del padre.
Explica qué significa la razón.

Solución:
Calculamos el cociente edad hija/edad padre = 15/45 = 1/3
La razón es 1/3 e indica que la edad de la hija es la tercera parte de la edad del padre.

14. ¿Forman proporción las siguientes razones?

a) $\frac{12}{60}$ y $\frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{2}$ y $\frac{6}{4}$

c) $\frac{5}{4}$ y $\frac{25}{20}$

Solución:
a) No forman proporción
b) Sí forman proporción
c) Sí forman proporción

15. Hallar el cuarto proporcional de las siguientes proporciones

a) $\frac{x}{4} = \frac{8}{2}$

b) $\frac{32}{x} = \frac{8}{5}$

c) $\frac{9}{7} = \frac{x}{7}$

d) $\frac{5}{12} = \frac{10}{x}$

Solución:

a)
$2 \cdot x = 4 \cdot 8$
$x = \frac{4 \cdot 8}{2}$
$x = \frac{32}{2} = 16$

b)
$8 \cdot x = 32 \cdot 5$
$x = \frac{32 \cdot 5}{8}$
$x = \frac{160}{8} = 20$

c)
$7 \cdot x = 7 \cdot 9$
$x = \frac{7 \cdot 9}{7}$
$x = \frac{63}{7} = 9$

d)
$5 \cdot x = 10 \cdot 12$
$x = \frac{10 \cdot 12}{5}$
$x = \frac{120}{5} = 24$

2. Proporcionalidad directa

Magnitudes directamente proporcionales

Magnitud es una propiedad que se puede medir y expresar con números.

Ejemplo de magnitudes son:

- número de cuadernos
- Kg de fruta que compramos
- precio a pagar

En ocasiones las magnitudes están relacionadas.

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si, al multiplicar una de ellas por un número, la otra queda multiplicada por el mismo número.

Las dos magnitudes (nº balones y coste) **son directamente proporcionales** porque a doble, triple,.. cantidad de la primera le corresponde doble, triple,... cantidad de la segunda.

Edad y altura **no son directamente proporcionales**. A doble, triple... edad no le corresponde doble, triple, altura.

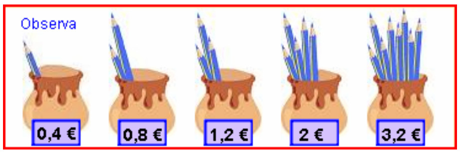
Constante de proporcionalidad directa

Dos magnitudes cuyas cantidades se corresponden con una tabla así

Magnitud 1ª (x)	a	b	c	...
Magnitud 2ª (y)	a'	b'	c'	...

son **directamente proporcionales** si se verifica que **a'/a = b'/b = c'/c = ... = k** siendo **k** la razón de proporcionalidad.

La constante de proporcionalidad directa, **k**, se calcula al dividir una cantidad cualquiera de la 2ª magnitud entre la correspondiente de la 1ª.



Construimos la tabla

nº de lápices x	1	2	3	5	8
coste (€) y	0,4	0,8	1,2	2	3,2

Las dos magnitudes son **directamente proporcionales**. Al dividir los valores de la 2ª magnitud entre los de la 1ª se obtiene el mismo resultado:

$$\frac{0,4}{1} = \frac{0,8}{2} = \frac{1,2}{3} = \frac{2}{5} = \frac{3,2}{8} = 0,4$$

El cociente 0'4 se llama **constante de proporcionalidad**

EJERCICIOS resueltos

16. Razona si los siguientes pares de magnitudes son o no directamente proporcionales

a.El número de obreros y el tiempo que tardan en terminar una obra.

b.El número de entradas al cine y el precio que debemos pagar.

c.El peso de una persona y su estatura.

d.Las distancias en un mapa y las distancias reales

a) No. Si en la obra trabajan el doble de obreros no van a tardar el doble de tiempo en terminarla , al contrario tardarán menos en hacerlo.
b) Si. Si compramos el doble, triple.. de entradas deberemos pagar el doble, triple..de dinero.
c) No. Cuando una persona dobla su estatura no dobla automáticamente su peso.
d) Si. Doble, triple... distancia en la vida real le corresponde doble, triple... distancia en el mapa.

17. Dada la siguiente tabla de valores directamente proporcionales, complétala y calcula la constante de proporcionalidad.

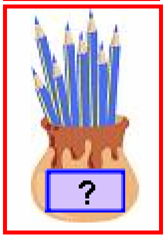
x	4		6		9
y		40		64	72

Solución k=8

x	4	5	6	8	9
y	32	40	48	64	72

EJEMPLO: Si 5 lápices cuestan 2 €. ¿Cuánto costarán 8 lápices?

1º) ¿Son directamente proporcionales?
Las magnitudes nº de lápices y coste son directamente proporcionales. Doble, triple... nº de lápices costarán doble, triple...



2º) Localizar dato

3º) Reducir a la unidad

$\boxed{\frac{2}{5} = 0{,}40\ €}$

costará un lápiz

4º) Contestar la pregunta

$\boxed{0{,}4 \cdot 8 = 3{,}2\ €}$

costarán 8 lápices

Método de reducción a la unidad

En muchos problemas de la vida real intervienen dos magnitudes directamente proporcionales. Conociendo tres cantidades nos piden calcular un cuarto dato.

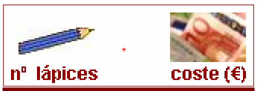
Para resolverlos disponemos de dos métodos, el primero es el método de reducción a la unidad, en el que hay que dar los siguientes pasos:

- Comprobar que las dos magnitudes son directamente proporcionales.
- Localizar el dato.
- Dividiendo se calcula el valor de la 2º magnitud que corresponde a una unidad de la 1ª.
- Multiplicando adecuadamente se calcula el valor deseado.

EJEMPLO: Si 5 lápices cuestan 2 €. ¿Cuánto costarán 8 lápices?

1º) ¿Son directamente proporcionales?. Las magnitudes nº de lápices y coste son directamente proporcionales. Doble, triple... nº de lápices costarán doble, triple...

2º) Separar las magnitudes.



3º) Escribir el dato.

5 lápices --> 2 €

4º) Escribir la pregunta.

8 lápices --> x

5º) Formar la proporción y resolver.

$$\boxed{\frac{5}{8} = \frac{2}{x}}$$

$$\boxed{x = \frac{2 \cdot 8}{5} = \frac{16}{5} = 3{,}2\ €}$$

Regla de tres simple directa

La otra forma de resolver los problemas en los que intervienen dos magnitudes directamente proporcionales es mediante una **regla de tres** directa simple.

Regla de tres simple directa. Pasos

- Comprobar que las dos magnitudes son directamente proporcionales.
- Separar en dos columnas las magnitudes.
- Escribir el dato.
- Escribir la pregunta.
- Escribir la proporción y hallar el cuarto proporcional.

EJERCICIOS resueltos

22. Si por 3 horas de trabajo un obrero cobra 12 € . ¿Cuánto cobrará por 7 h? (Resuélvelo por reducción a la unidad)

Solución: Dividimos 12/3 = 4 € ganará en 1 hora
Multiplicamos 4 · 7 = 28 € ganará en 7 horas

23. Si por 5 horas de trabajo un obrero cobra 24 € ¿Cuánto cobrará por 13 h? (Resuélvelo mediante una regla de tres)

Llamamos x = euros que ganará

horas		euros
4	------->	76 €
75	------->	x

Resolvemos

$$\boxed{\frac{4}{75} = \frac{76}{x} \Rightarrow 4x = 5700 \Rightarrow x = \frac{5700}{4} = 1425 \text{ euros ganará}}$$

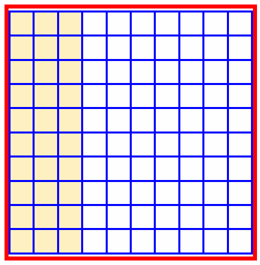
3. Porcentajes

Significado del tanto por ciento

Es muy habitual escuchar noticias como las siguientes: "Las ventas de automóviles ha descendido un 20%", "El 45% de los españoles utiliza Internet". Expresar un tanto por ciento (20%,45%) de una cantidad (venta, población ...) equivale a dividir esa cantidad en 100 partes y coger el tanto por ciento indicado.

Un porcentaje (cuyo símbolo es %) es una razón de denominador 100. Se puede expresar como una fracción y como decimal.

$$\frac{30}{100}$$



30 % **0,30**

EJEMPLO: El 30 % de la población utiliza Internet

Se lee " el treinta por ciento de la población utiliza Internet"

Como **fracción** se escribe: $\frac{30}{100}$

Es un **decimal** : $\frac{30}{100} = 0{,}3$

Cálculo de porcentajes

Para calcular el tanto por ciento de una cantidad disponemos de varios métodos:

1. El porcentaje es una fracción.
2. El porcentaje es un decimal.
3. El porcentaje es una proporción y podemos usar una regla de tres simple directa.

Observa en el ejemplo cómo se calcula el tanto por ciento de una cantidad según los distintos métodos.

100 %

92 %

EJEMPLO:
Se llena el 92% de un depósito de 500 litros de capacidad ¿Cuántos litros se han necesitado?

Método 1) Escribir en forma de fracción 92% $\rightarrow \frac{92}{100}$

Convertir "*de*" en una multiplicación y operar

$\frac{92}{100}$ de 500

$\frac{92}{100} \cdot 500 = 460$ litros

Método 2) Pasar a forma decimal 92% $\rightarrow$ 0,92

Convertir "*de*" en una multiplicación y operar:

0,92 de 500

0'92·500 = 460 litros

Método 3) Llamamos x a la cantidad desconocida.

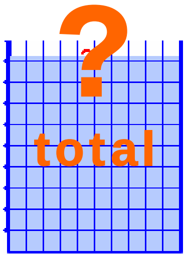
Escribir una regla de tres, formar la proporción y resolver.

%	litros
100 --→	500
92 --→	x

$$\frac{100}{92} = \frac{500}{x}$$

$$x = \frac{500 \cdot 92}{100} = 460 \text{ litros}$$

EJEMPLO 1: Un depósito que contiene 460 litros de agua, está lleno al 92% de su capacidad, ¿cuántos litros caben?.



%	litros
92 -->	460
100 -->	x

$$\frac{92}{100} = \frac{460}{x}$$

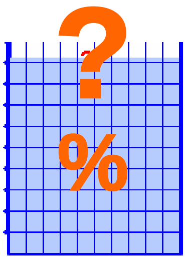
$$x = \frac{460 \cdot 100}{92} = 500$$

EJEMPLO 1: En un depósito de 500 litros de capacidad, echamos 460 litros de agua, ¿qué porcentaje hemos llenado?.

litros	%
500 -->	100
460 -->	x

$$\frac{500}{460} = \frac{100}{x}$$

$$x = \frac{460 \cdot 100}{500} = 92\%$$



Cálculo del total y del porcentaje

Otros dos tipos de ejercicios son:

- **Calcular el total**, conociendo el porcentaje y la cantidad que supone.
- **Calcular el porcentaje**, conociendo el total y la cantidad.

Para resolverlos basta emplear la proporción, recuerda que:

1) La cantidad desconocida se llama **x**.

2) El **100%** corresponde siempre al **total**.

Observa los ejemplos de la izquierda.

%	magnitud
100 --->	total
porcentaje --->	cantidad

EJERCICIOS resueltos

18. Escribe en forma de fracción y de número decimal a) 55 % b)39 % c) 90 %

Solución: Fracción a) 55/100 b) 39/100 c) 90/100
Decimal a) 0'55 b) 0'39 c) 0'9

19. Calcula el 35 % de 500 usando los tres métodos

1)

porcentaje		cantidad	
si se pidiera el 100%	------>	500	(la respuesta es el total)
como se pide el 35%	------>	x	(es la cantidad)

$$\frac{100}{35} = \frac{500}{x}$$

$$100x = 35 \cdot 500$$

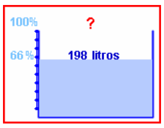
$$x = \frac{17500}{100} = 175$$

2) $\frac{35}{100}$ de 500 $\quad \frac{35}{100} \cdot 500 \quad \frac{35 \cdot 500}{100} = \frac{17500}{100} = 175$

3) $\frac{35}{100}$ de 500 $\quad$ 0,35 de 500 $= 0.35 \cdot 500 = 175$

20. Se ha llenado el 66% de un depósito con 198 litros. Calcula su capacidad

Solución: Llamamos x = capacidad del depósito



	Porcentaje		Cantidad
Escribir **el dato:**	66 %	------>	198
Escribir **la pregunta:**	100%	------>	x

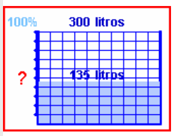
$$\frac{66}{100} = \frac{198}{x}$$

$$66x = 100 \cdot 198 \Rightarrow 66x = 19800$$

$$x = \frac{19800}{66} = 300 \text{ litros caben en el depósito}$$

21. En un depósito de 300 litros de capacidad echamos 135 l de agua. ¿qué porcentaje del depósito hemos llenado?

Solución: Llamamos x = porcentaje del depósito que hemos llenado



	Porcentaje		Cantidad
Escribir **el dato:**	100 %	-------->	300
Escribir **la pregunta:**	x	-------->	135

$$\frac{100}{x} = \frac{300}{135}$$

$$100 \cdot 135 = 300x \Rightarrow 13500 = 300x$$

$$x = \frac{13500}{300} = 45\%$$

Hemos llenado el 45 % del depósito

Para practicar

Resuelve por el método de reducción a la unidad

1. Alicia pagó 30 ∈ por 5 kg de peras. ¿Cuántos kilos compró si pagó 39 ∈?

2. Un obrero gana 280 ∈ por 56 horas de trabajo. ¿cuánto ganará si trabaja 65 horas?

3. Viajamos a un país lejano cuya moneda es el yin-zu. Si un yin-zun equivale a 4 ∈ . ¿cuántos yin-zu nos darán por 453 ∈?

4. Un motorista tarda 4 horas en recorrer 276 km. Si mantiene una velocidad constante ¿Cuánto tardará en recorrer 414 km?

Resuelve usando una regla de tres

5. En una oficina se gastan 525 folios en 5 días. ¿Cuántos folios se gastarán en 24 días?

6. Con 59 kg de harina se elaboran 118 kg de pan. ¿Cuántos kg de harina se necesitan para fabricar 16 kg de pan?

7. La escala de un mapa es 1:400000. La distancia en el mapa de dos ciudades es de 4 cm. ¿Qué distancia las separa en la realidad?

8. Al elaborar un postre para dos personas se necesitan 120 kg de arroz ¿cuánto arroz necesitarás si preparas el postre para 3 personas?

Problemas de porcentajes

9. En un concesionario se venden 8100 vehículos al año, de ellos el 67% son turismos. Hallar el número de turismos que se venden al año en ese concesionario.

10. En una ciudad se envían 9800 mensajes de móvil diarios. El 57% de ellos son mensajes multimedia. ¿Cuántos mensajes multimedia se envían al día?.

11. El 17% de los alumnos de instituto estudian inglés. Si hay 9200 alumnos de instituto ¿cuántos estudian inglés?

12. María recibe el 48% del dinero de las ventas que consigue. Si quiere ganar 2976 ∈ ¿cuánto tendrá que vender?

13. El 38% de las mujeres encuestadas afirman que practican algún deporte. Si sabemos que éstas eran 228 ¿cuántas fueron encuestadas?

14. De los 2300 vehículos que se venden en un concesionario 690 son turismos. Expresa esa cantidad mediante un porcentaje.

15. De los 4200 alumnos matriculados en instituto 462 estudian inglés ¿qué porcentaje representan?

16. El precio de un artículo es de 800 ∈ pero el vendedor nos hace un 13% de descuento. ¿Cuánto pagaremos en realidad?

17. El precio de un artículo es de 7000 ∈ pero tiene un 51% de recargo. ¿Cuánto pagaremos en realidad?

18. El precio de un artículo es de 5000 ∈ pero tiene un 10% de recargo. ¿Cuánto pagaremos en realidad?

19. El precio de una artículo sin IVA es 4000 ∈. Si el IVA es del 12% cuánto pagaremos en realidad?

20. El precio de una artículo sin IVA es 200 ∈. Si el IVA es del 7% cuánto pagaremos en realidad?

Para saber más

Los viajes de Gulliver

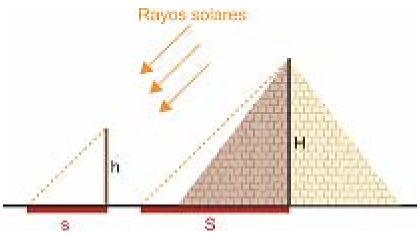
El escritor Jonathan Swift escribió esta obra en la que narra las aventuras de Gulliver en países imaginarios.

Brobdingnag es el país de los gigantes y Lilliput el de los enanos. En el primero todo es 12 veces más grande y en el segundo 12 veces más pequeño de lo que es en nuestro mundo. Así, por ejemplo, en Liliput un dedal se usa de cubo de agua, un pincel es una escoba, un palillo es una lanza etc.

¿Cuál es la altura de las pirámides de Egipto?

Hace más de 2500 años un faraón le pidió al sabio Tales de Mileto que calculara la altura de una pirámide.

Ahora te explicamos cómo lo resolvió.



Tales llamó **x** = altura de la pirámide

Cogió una vara y midió la vara (h) y altura de su sombra (s), y pidió medir la longitud de la sombra de la pirámide (S).

Aplicó una regla de tres:

	altura objetos	*longitud sombra*
Dato:	**h** -------------->	**s**
Pregunta:	**x** -------------->	**S**

y así calculó la altura de la pirámide (x)

Comisiones bancarias

¿Qué sabes de las comisiones bancarias? ¿Sabes cuándo las cobran y a quién?

El banco nos cobra cada vez que hacemos una transferencia y gana dinero cada vez que usamos la tarjeta de crédito para pagar nuestras compras. Averigua los porcentajes.

El IVA
Impuesto sobre el valor añadido

¿Te has fijado que hay distintos tipos de IVA?. ¿Sabes qué porcentaje de IVA se aplica a cada producto?

16 % por regla general	**7 %** el reducido	**4 %** el súper reducido
Se aplica a electrodomésticos, ropa, calzado, bricolaje, tabaco, bebidas alcohólicas, etc	Se aplica a entradas a teatros, conciertos, cine, … agua; peluquerías; dentistas; servicios de hostelería; transporte de viajeros; edificios, viviendas y plazas de garaje; complementos para el diagnóstico o alivio de enfermedades y alimentos no incluidos en el IVA superreducido …	Se aplica a bienes y servicios de primera necesidad: pan, verduras, frutas, leche, quesos, huevos, hortalizas, … que no hayan sido modificados de ninguna forma. Libros, periódicos y revistas no publicitarias; medicamentos; sillas de ruedas para minusválidos y prótesis; viviendas de Protección Oficial.

Recuerda lo más importante

- **Razón**: cociente entre dos números.
- **Proporción** es una igualdad entre dos razones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Se lee: *"a es a b como c es a d"*
a y **d** se llaman **extremos**
b y **c** se llaman **medios**

Propiedad fundamental de las proporciones:

- El producto de medios es igual al producto de extremos

$$a \cdot d = c \cdot b$$

- Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si al doble, triple de la primera le corresponde doble, triple de la segunda...

Mag 1	0,5	1	1,5	2	3	10
Mag 2	1,5	3	4,5	6	9	30

La constante de proporcionalidad directa, **k**, es el cociente entre una cantidad cualquiera de la 2ª magnitud y la correspondiente de la 1ª.

$$\mathbf{k} = \frac{1{,}5}{0{,}5} = \frac{3}{1} = \frac{4{,}5}{1{,}5} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{30}{10} = \mathbf{3}$$

Resolución de problemas con magnitudes directamente proporcionales

Reducción a la unidad

1) Ver que las dos magnitudes son directamente proporcionales.

2) Dividiendo hallar el valor de una de las dos magnitudes que corresponde a una unidad de la otra.

3) Multiplicando se halla el valor pedido.

Regla de tres simple directa

1) Ver que las dos magnitudes son directamente proporcionales.

2) Se escribe: *Magnitud 1* *Magnitud 2*

Dato: a ------> b
Pregunta: c ------> x

3) Se calcula: $x = \frac{c \cdot b}{a}$

- ***Porcentaje o tanto por ciento*** es la cantidad que hay en cada 100 unidades.

Se expresa mediante el símbolo %. Un porcentaje es equivalente a una razón de denominador 100 y también al número decimal correspondiente.

%	magnitud
100 ---→	total
porcentaje ---→	cantidad

Autoevaluación

1. En un instituto hay 42 chicos y 21 chicas. Halla la razón entre el números de chicos y el número de chicas. ¿qué indica la razón?

2. La edad de una persona y su peso ¿son magnitudes directamente proporcionales?

3. ¿Forman proporción las siguientes razones? 8/3 y 64/24

4. Calcula el cuarto proporcional de la siguiente proporción: 2/9 = 16/x

5. Si 7 DVDs cuestan 14 euros ¿cuánto costarán 2 DVDs? Resuélvelo usando el método de reducción a la unidad.

6. Si 3 DVDs cuestan 24 euros ¿cuánto costarán 5 DVDs? Resuélvelo usando una regla de tres

7. El 35% de los árboles de un parque se plantaron en abril. Si en total hay 600 árboles ¿cuántos se plantaron en abril?

8. Un videojuego costaba 8 euros y he pagado 6 euros. ¿Qué porcentaje me han rebajado?

9. Una agencia de viajes ha vendido 560 plazas de un avión lo que supone un 28% del total. ¿De cuántas plazas dispone el avión?

10. Un sofá que costaba 5500 euros se ha rebajado un 12%. ¿Cuánto pagaremos en realidad?

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. 6.5 kg
2. 325 ∈
3. 113,25 ∈
4. 6 horas
5. 2520 folios
6. 8 kg de pan
7. 16 km
8. 180 gr de arroz
9. 5427 turismos
10. 5586 mensajes multimedia
11. 1564 alumnos
12. 6200 ∈
13. 600 mujeres
14. 30%
15. 11%
16. 696 ∈ pagaremos
17. 10570 ∈ pagaremos
18. 5500 ∈
19. 3520 ∈ pagaremos
20. 186 ∈ pagaremos

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. La razón es 2. Indica que el nº de chicos es el doble que el de chicas
2. No son directamente proporcionales
3. Sí forman proporción
4. x = 72
5. 4 euros costarán
6. 40 euros costarán
7. 210 árboles se plantaron en abril
8. 25 % de descuento
9. 2000 plazas en total
10. 4840 euros pagaremos

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

7

Expresiones algebraicas

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Utilizar letras para representar números desconocidos.
- Hallar el valor numérico de una expresión algebraica.
- Sumar, restar y multiplicar monomios.
- Resolver ecuaciones de primer grado.
- Resolver problemas mediante ecuaciones de primer grado.

Antes de empezar

En esta quincena veremos la forma de utilizar letras para representar números desconocidos. Uno de los ejemplos de la utilización de las letras para representar números lo tenemos en algunos ejercicios de **investigación** y otro en los **números romanos.**

Solución:

$$\begin{array}{r} aab \\ \underline{+\ aba} \\ bcc \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} aab \\ \underline{+\ aba} \\ b33 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 112 \\ \underline{+\ 121} \\ 233 \end{array}$$

Números romanos

Recordemos las letras que se utilizan en la numeración romana

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1.000

y recordemos también algunas de sus reglas:

- Las letras **I**, **X** y **C** escritas a la derecha de otra de igual o mayor valor le suman a ésta su valor.

$$VI \longrightarrow 5 + 1 = 6$$

- Las letras **I**, **X** y **C** escritas a la izquierda de otra de igual o mayor valor le restan a ésta su valor.

$$XC \longrightarrow 100 - 10 = 90$$

- Solamente pueden repetirse las letras I, X, C y M y como máximo tres veces seguidas.

$$CC \longrightarrow 100 + 100 = 200$$

- Una línea horizontal encima de un número multiplica por 1000 su valor (para números mayores que 3999).

$$\overline{X} \longrightarrow 10 \times 1000 = 100000$$

1. Lenguaje algebraico

Expresiones algebraicas

El **lenguaje numérico** expresa la información matemática a través de los números, pero en algunas ocasiones, es necesario utilizar letras para expresar números desconocidos.

El **lenguaje algebraico** expresa la información matemática mediante letras y números.

Una **expresión algebraica** es una combinación de letras, números y signos de operaciones.

Así, **x+2** es una expresión algebraica formada por la letra **x**, el signo + y el número **2.** Esta expresión algebraica puede leerse como **un número más dos**.

Para **escribir** una expresión algebraica debes tener en cuenta que puedes sustituir el signo x de la multiplicación por el signo · o bien puedes suprimirlo

$$\mathbf{3} \times \mathbf{x^2} \longrightarrow 3 \cdot x^2 \longrightarrow \mathbf{3x^2}$$

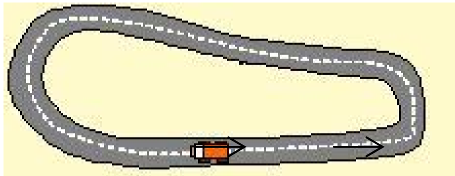
y también que no se suelen escribir ni el factor 1 ni el exponente 1.

$$\mathbf{1x^5} \longrightarrow \mathbf{x^5} \qquad \mathbf{8x^1} \longrightarrow \mathbf{8x}$$

Ejemplos:

Extraemos 3 bolas de una vasija que contiene **x** bolas. La expresión algebraica que da el número de bolas que quedan es **x – 3**.

Un coche da 3 vueltas a un circuito de longitud **l** kilómetros. La expresión algebraica que indica el espacio que recorre es **3l**.



Traducción de enunciados

Como has visto el lenguaje algebraico permite expresar operaciones con números desconocidos.

Así, se puede representar **la suma de dos números** como **x+y** y **el triple de la suma de dos números** como **3(x+y)**.

De esta forma se realiza una **traducción de enunciados** a lenguaje algebraico.

Asimismo mediante la traducción de enunciados se pueden expresar números desconocidos en términos de otros.

Por ejemplo, si la **edad de Juan** es **x** y Lola tiene el triple de la edad de Juan mas cuatro años, se puede expresar la **edad de Lola** como **3x+4** y si Pedro tiene el doble de la edad de Lola, se puede expresar la **edad de Pedro** como **2(3x+4)**.

Ejemplos:

Si **Juan** tiene **x** llibros y Ana tiene el doble de los libros que tiene Juan más 5 se puede expresar el **número de libros que tiene Ana** como **2x+5**.

Si el precio de un lápiz es **x** euros y el de un bolígrafo **y** euros, el precio de **5 lápices** y **3 boligrafos** se puede expresar como **5x+3y**.

Ejemplos:

El valor numérico de $3x^3-5x^2$ para x = 2 es:
3·23-5·22= 3·8-5·4=24-20=4

Si el precio de alquiler de un coche es de 78 € diarios más 0,12 € por km recorrido, la expresión algebraica **78x+0,12y** indica el importe que se debe pagar por alquilar **x** días un coche y recorrer **y** km.
Podemos hallar el importe que se debe pagar por alquilar un coche 2 días y recorrer 400 km sustituyendo la **x** por **2** y la **y** por **400**. Observa:

78·2+0,12·200=156+24=180

Se deberán pagar 180 €.

Valor numérico

Las expresiones algebraicas indican operaciones con números desconocidos.

Por ejemplo, si un operario cobra 15 € por el desplazamiento y 20 € por cada hora , la expresión algebraica **15 + 20x** indica el importe que cobrará por un **número desconocido x** de horas de trabajo.
Y si queremos averiguar cuanto cobrará por trabajar **2** horas sustituiremos **x** por **2**. Observa:

$$\mathbf{15+20x} \xrightarrow{\text{para } x = 2} \mathbf{15+20.2=15+40=55} \text{ euros}$$

De esta forma hemos hallado el **valor numérico** de **15 + 20x** para **x = 2** y hemos obtenido **55**.

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el número que se obtiene al sustituir las letras por números y realizar las operaciones indicadas.

EJERCICIOS resueltos

1. Escribe en lenguaje algebraico:
   a) El doble de un número más tres.
   b) El cuadrado de un número menos cinco.
   c) El doble de un número más el triple del mismo número.

   a) **2x + 3** b) **x^2 – 5** c) **2x + 3x**

2. Escribe una expresión algebraica que de:
   a) El perímetro de un triángulo equilátero de lado **x**
   b) El perímetro de un rectángulo de base **x** cuya altura mide 1 cm menos que su base.
   c) El área de un rectángulo de base **x** cuya altura mide 6 cm menos que su base.

   a) **3x** b) **4x - 2** c) **x(x-6)**

3. Ana tiene 2 años más que Juan. Si representamos por **x** la edad actual de Juan expresa en lenguaje algebraico la suma de las edades de ambos dentro de 5 años.

	Juan	Ana
Edad actual	x	x+2
Edad dentro de 5 años	x+5	x+7

   La suma de las edades de ambos dentro de 5 años es: **x + 5 + x + 7**

4. Representamos por **x** el número de coches que hay en un aparcamiento y por **y** el número de motos. Escribe una expresión algebraica que indique el número de ruedas que hay en total.
   - Mediante la expresión algebraica hallada calcula el número total de ruedas si en el aparcamiento hay 12 coches y 5 motos.

   Ruedas de coches → 4x Ruedas de motos → 2y Total → **4x+2y**
   Hallamos el valor numérico de 4x + 2y para x = 12 e y = 5
   4·12 + 2·5 = 48 + 10 = 58
   En el aparcamiento hay **58** ruedas.

2. Monomios

Características

Las siguientes expresiones algebraicas:

$$8x^3 \qquad 2x^4 \qquad 3x$$

están formadas por el **producto** de un número y de una letra. Reciben el nombre de **monomios**.

Un monomio está formado por un **coeficiente** y por una **parte literal**. Observa:

Monomio	Coeficiente	Parte literal
$8x^3$	8	x^3
$2x^4$	2	x^4
$3x$	3	x

Grado = 6

Coeficiente = 7

$$7x^6$$

Parte literal = x^6

Si un monomio está formado por una única letra su coeficiente es 1. El coeficiente de x^7 es **1**.

El **grado** de un monomio es el exponente de la letra. El grado de $8x^3$ es **3**, el de $2x^4$ es **4** y el de **3x** es **1**.

Suma y resta

Observa que los monomios $12x^3$ y $4x^3$ tienen la **misma parte literal**. Reciben el nombre de **monomios semejantes**.

Para **sumar** o **restar monomios semejantes** se suman o se restan los coeficientes y se deja la misma parte literal.

$$12x^3 + 4x^3 = 16x^3$$

$$8x^3 - 2x^3 = 6x^3$$

Si los monomios **no son semejantes** la suma o resta se deja indicada.

Si una expresión algebraica está formada por monomios no todos ellos semejantes, únicamente se suman o restan los que son semejantes entre si.

$$2x - x^2 + 3x = 5x - x^2$$

Esta operación recibe el nombre de **reducción de términos semejantes.**

Ejemplos:

Los monomios $3x^{10}$ y $8x^{10}$ son semejantes.
Los monomios $5x^7$ y $8x^6$ no son semejantes ya que no tienen la misma parte literal.

En un jardín hay **x** flores rojas y el doble de flores blancas más cinco, es decir **2x + 5** flores blancas. Podemos expresar algebraicamente la **suma** de flores que hay en el jardín como:

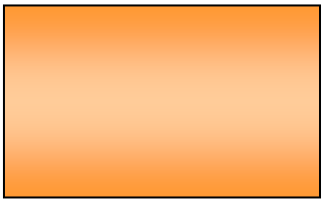
$$x + 2x + 5 = 3x + 5$$

Podemos expresar la **diferencia** de flores blancas y rojas como:

$$2x + 5 - x = x + 5$$

Ejemplo:

Observa las dimensiones del rectángulo de la siguiente figura:

2x

3x

Podemos expresar algebraicamente su área como:

$$3x \cdot 2x = \mathbf{6x^2}$$

Producto

Para **multiplicar dos monomios** se multiplican los coeficientes y se multiplican las partes literales.

se suman los exponentes: 3+4=7

$$8x^3 \cdot 5x^4 = 8 \cdot 5\ x^3 \cdot x^4 = 40x^7$$

Para multiplicar un **número por un monomio** se multiplica el número por el coeficiente del monomio y se deja la misma parte literal.

$$2 \cdot 10x^4 = 20x^4$$

Así, el **resultado** obtenido tanto al multiplicar dos monomios como al multiplicar un número por un monomio es un **monomio**.

EJERCICIOS resueltos

5. Escribe para cada uno de los siguientes apartados un monomio que cumpla las condiciones requeridas:
   a) que tenga coeficiente 12 y el mismo grado que el momio $3x^5$.
   b) que tenga grado 5 y el mismo coeficiente que el monomio $-2x^6$.
   c) que tenga por parte literal x^2 y cuyo valor numérico para x = 5 sea 50.

   a) $\mathbf{12x^5}$ b) $\mathbf{-2x^5}$ c) $\mathbf{2x^2}$

6. Opera y reduce los términos semejantes de las siguientes expresiones algebraicas:
   a) $3x^3 + 4x^2 + 5x^2 + 4x^3$
   b) $5x^3 - 7x^2 - 8x^3 - 2x^2 - 1$
   c) $2x \cdot 5x - 3x \cdot 4x$

   a) $\mathbf{7x^3 + 9x^2}$ b) $\mathbf{-3x^3 - 9x^2 - 1}$ c) $2x \cdot 5x - 3x \cdot 4x = 10x^2 - 12x^2 = \mathbf{-2x^2}$

7. Halla el monomio que se obtiene al efectuar el siguiente producto:

$$2x^5 \cdot \frac{1}{2}x^3 \cdot 5x^2 \cdot 6x^3 \cdot \frac{1}{15}x$$

   Para hallar el coeficiente multiplicamos los coeficientes $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{1}{15} = 2$

   Para hallar el grado se suman los exponentes 5 + 3 + 2 + 3 + 1 =14
   El resultado del producto es el monomio $\mathbf{2x^{14}}$.

8. La suma de dos monomios es $5x^2$ y uno de ellos es $3x^2$. ¿Cuál es su producto?
   Hallamos el monomio que al sumarlo con $3x^2$ se obtiene $5x^2$.

$$5x^2 - 3x^2 = 2x^2$$

   El producto de los dos monomios es $3x^2 \cdot 2x^2 = \mathbf{6x^4}$

9. El producto de dos monomios es $20x^4$ y uno de ellos es $4x^2$. ¿Cuál es su suma?
   El monomio que al multiplicarlo por $4x^2$ da $20x^4$ es $5x^2$.
   La suma de los dos monomios es $4x^2 + 5x^2 = \mathbf{9x^2}$

3. Ecuaciones

Solución de una ecuación

Una igualdad está formada por dos expresiones separadas por el signo =. Si en alguna de ellas intervienen letras se tiene una **igualdad algebraica**.

Una **ecuación** es una igualdad algebraica que solo es cierta para un determinado valor de la letra. Así **x+5=11** es una ecuación ya que solo se cumple si x es 6.

En una ecuación podemos identificar dos **miembros** separados por el signo =

primer miembro ⟶ **x+5 =11** ⟵ segundo miembro

y también los **términos** que son los sumandos que forman los miembros. Así, **5** es un término.

La **incógnita** de la ecuación es la letra que aparece en la ecuación. La incógnita de la ecuación x+5 = 11 es **x**.

Un número es **solución** de la ecuación si al sustituir la incógnita por este número la igualdad se verifica. Así. el número **6** es solución de la ecuación x+5=11 ya que al sustituir x por 6 se obtiene la igualdad 6+5=11.

Ecuación

Primer miembro | **Segundo miembro**

$$\underbrace{\boxed{\underbrace{3x}_{\text{término}} + \underbrace{2}_{\text{término}}}}_{} = \boxed{\underbrace{x}_{\text{término}} + \underbrace{4}_{\text{término}}}$$

Incógnita: x

Solución: 1

$$3 \cdot 1 + 2 = 1 + 4$$

Ecuaciones equivalentes

Las solución de las ecuaciones x+2=5 y x+7=10 es la misma, 3. Las ecuaciones que tienen la misma solución se denominan **ecuaciones equivalentes**.

Para obtener una ecuación equivalente a una dada se utilizan las siguientes **propiedades de las igualdades**:

a) Si **sumamos** o **restamos** un mismo número o una misma expresión algebraica a los dos miembros de una ecuación obtenemos otra ecuación equivalente.

Por ejemplo, para obtener una ecuación equivalente a x+2=5 sumamos **3** a los dos miembros:

$$x+2+\mathbf{3}=5+\mathbf{3} \qquad \mathbf{x+5=8}$$

Fíjate en que la ecuación obtenida x+5=8 también tiene por solución 3.

b) Si **multiplicamos** o **dividimos** los dos miembros de una ecuación por un mismo número diferente de cero obtenemos otra ecuación equivalente.

Así, para obtener una ecuación equivalente a x+2=5 podemos multiplicar por **4** los dos miembros:

$$\mathbf{4}(x+2)=\mathbf{4}\cdot 5 \qquad \mathbf{4x+8=20}$$

La ecuación obtenida 4x+8=20 también tiene por solución 3.

Ejemplo:

La ecuación

$$\mathbf{6x - 2 = 4x + 6}$$

tiene por solución x = 4.

Observa como obtenemos ecuaciones equivalentes:

- Sumando **2** a los dos miembros:

  $$6x - 2 + \mathbf{2} = 4x + 6 + \mathbf{2}$$
  $$\mathbf{6x = 4x + 8}$$

- Sumando **-4x** a los dos miembros:

  $$6x - 2 - \mathbf{4x} = 4x + 6 - \mathbf{4x}$$
  $$\mathbf{2x - 2 = 6}$$

- Restando **6** a los dos miembros:

  $$6x - 2 - \mathbf{6} = 4x + 6 - \mathbf{6}$$
  $$\mathbf{6x - 8 = 4x}$$

- Dividiendo por **2** los dos miembros:

  $$\mathbf{3x - 1 = 2x + 3}$$

Fíjate en que todas las ecuaciones halladas tienen por solución x = 4.

Resolución de ecuaciones

Resolver una ecuación consiste en hallar su solución.

Observa como se procede para resolver la ecuación

$$7x - 2 = 5x + 4$$

- Realizamos una **transposición** de términos pasando a un miembro todos los términos que contienen la incógnita y al otro miembro los que no la contienen.

$$7x - 5x = 4 + 2$$

- Efectuamos operaciones en cada uno de los miembros para **reducir** los términos semejantes.

$$2x = 6$$

- **Despejamos** la incógnita y calculamos la solución.

$$x = \frac{6}{2} = 3$$

La solución de la ecuación **7x -2 = 5x + 4** es **x =3**.

Ejemplos:

$$x + 2 = 5$$
$$x = 5 - 2$$
$$x = 3$$

$$3x = 18$$
$$x = \frac{18}{3} = 6$$

$$5x + 1 = 6$$
$$5x = 6 - 1$$
$$5x = 5$$
$$x = \frac{5}{5} = 1$$

$$5x + 12 = 2x$$
$$5x - 2x = -12$$
$$3x = -12$$
$$x = \frac{-12}{3} = -4$$

Resolución de problemas

Se pueden resolver algunos problemas en los que se plantea una relación de igualdad mediante ecuaciones. Por ejemplo, veamos el siguiente problema:

El doble de un número menos 2 es igual a 8. ¿De qué número se trata?

- La **incógnita** es el número desconocido: **x**
- Expresamos mediante una **ecuación** la igualdad planteada en el enunciado:

$$2x-2=8$$

- **Resolvemos** la ecuación:

$$2x = 8+2$$
$$2x = 10$$
$$x = \frac{10}{2} = 5$$

- **Comprobamos** si la solución de la ecuación verifica las condiciones del enunciado:

$$2.5-2=8$$

- **Respuesta**: El número es **5**.

De esta forma hemos resuelto un problema mediante el planteamiento y la resolución de una ecuación.

Al resolver un problema mediante una ecuación seguiremos los siguientes pasos:

- Leer atentamente el enunciado.
- Identificar la incógnita.
- Plantear la ecuación.
- Resolver la ecuación planteada.
- Comprobar la solución obtenida.
- Escribir la respuesta.

EJERCICIOS resueltos

10. Comprueba si $x = 3$ es solución de alguna de las siguientes ecuaciones:

a) $4x - 1 = 2$ b) $5x - 2 = 3x + 4$ c) $x + 4 = 2x + 1$

a) $4 \cdot 3 - 1 \# 2 \longrightarrow$ **No** es solución
b) $5 \cdot 3 - 2 = 3 \cdot 3 + 4 \longrightarrow$ **Si** es solución
c) $3 + 4 = 2 \cdot 3 + 1 \longrightarrow$ **Si** es solución

11. Comprueba si las siguientes ecuaciones son equivalentes:

a) $x +5 = 6$ b) $2x + 4 = 5x + 1$ c) $5x -5 = 0$

a) $x + 5 = 6 \longrightarrow x = 6 - 5 \longrightarrow x = 1$

b) $2x + 4 = 5x + 1 \longrightarrow 2x - 5x = 1 - 4 \longrightarrow -3x = -3 \longrightarrow x = \frac{-3}{-3} = 1$

c) $5x - 5 = 0 \longrightarrow 5x = 5 \longrightarrow x = \frac{5}{5} = 1$

Las tres ecuaciones son equivalentes ya que tienen la misma solución.

12. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x + 4 = 10$
b) $4 + 4x = -8$
c) $5x + 2 = 7x + 4$

a) $2x + 4 = 10 \longrightarrow 2x = 10 - 4 \longrightarrow 2x = 6 \longrightarrow x = \frac{6}{2} = \mathbf{3}$

b) $4 + 4x = -8 \longrightarrow 4x = -8 - 4 \longrightarrow 4x = -12 \longrightarrow x = \frac{-12}{4} = \mathbf{-3}$

c) $5x + 2 = 7x + 4 \longrightarrow 5x - 7x = 4 - 2 \longrightarrow -2x = 2 \longrightarrow x = \frac{2}{-2} = \mathbf{-1}$

13. En una bolsa que contiene 54 bolas entre blancas y negras, el número de bolas blancas es superior en 10 al de bolas negras. ¿Cuántas bolas de cada color hay en la bolsa?

bolas negras $\longrightarrow x$ bolas blancas $\longrightarrow x + 10$

Ecuación: $x + x + 10 = 54$
$x + x = 54 - 10$
$2x = 44$

$x = \frac{44}{2} = 22$ $x + 10 = 22 + 10 = 32$

Los valores 22 bolas negras y 32 bolas blancas verifican las condiciones del enunciado. Así en la bolsa hay **22 bolas negras** y **32 bolas blancas**.

14. La suma de tres números enteros consecutivos es igual al menor menos 43. ¿De qué números se trata?

número menor $\longrightarrow x$ siguiente a x $\longrightarrow x + 1$ siguiente a x + 1 $\longrightarrow x + 2$

Ecuación: $x + x + 1 + x + 2 = x - 43$
$x + x + x - x = -43 - 1 - 2$
$2x = -46$

$x = \frac{-46}{2} = -23$

$x + 1 = -23 + 1 = -22$ $x + 2 = -23 + 2 = -21$

Los valores -23, -22 y -21 verifican las condiciones del enunciado. Así los números son **-23**, **-22** y **-21**.

Para practicar

1. Expresa en lenguaje algebraico:

a) El triple de un número **x** más 100.

b) El precio en euros de **x** quilogramos de peras a 1,45€/kg.

c) El importe de una factura de **x** euros si se le aplica un 16% de IVA.

d) El doble de la edad que tenía Ana hace 5 años si su edad actual es **x** años.

2. En un aparcamiento hay coches de color blanco, de color rojo y de color negro. El número de coches de color rojo es el doble del de color blanco más 1 y el de color negro el triple del de color blanco menos 5. Con estos datos completa la siguiente tabla:

	Número de coches
Color blanco	**x**
Color rojo	
Colar negro	
Total	

3. Halla el valor numérico de $x^2 - 5x + 6$ para x = 0, para x = 1 y para x = 3.

4. Halla el valor numérico de $\dfrac{c(a+b)}{2ab-c}$ para a = 1, b = 2 y c = 3.

5. Si x + y = 5 calcula:

a) x + y + 2

b) x + y – 4

c) 6(x + y)

d) x + y – 8(x + y)

6. Una empresa de autocares cobra 250 € fijos más 0,15 € por kilómetro recorrido.

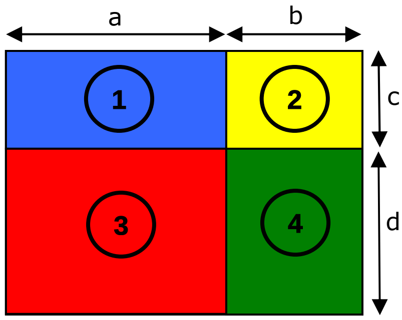
a) Expresa en lenguaje algebraico el importe que se debe pagar si se alquila para realizar un trayecto de **x** kilómetros.

b) Halla el precio que se debe pagar al alquilar el autocar y recorrer 400 km.

7. Observa y completa las casillas vacías:

1	2	3	4	5	6	7	n
1	4	9	16	25			

8. Indica mediante expresiones algebraicas el área y el perímetro de los rectángulos señalados en la siguiente figura:



9. Indica cuales de los siguientes monomios son semejantes:

$3x$ $\quad 8xy \quad 5x \quad -4x^2$

$\frac{1}{2}x \quad \frac{1}{3}x^2 \quad -5xy \quad 7x^2$

10. Realiza las siguientes operaciones:

a) $3x + 5x + 2x$

b) $3x^2 - 4x^2 + 7x^2$

c) $x^3 - 5x^3 + 4x^2 - 3x^2$

d) $5x^4 + 7x^3 - 6x^4 + 11x^3$

11. Completa la siguiente la tabla:

	x	4x	x^2
Doble			
Cuadrado			
Triple más 1			

12. Efectúa los productos indicados y a continuación reduce los términos semejantes:

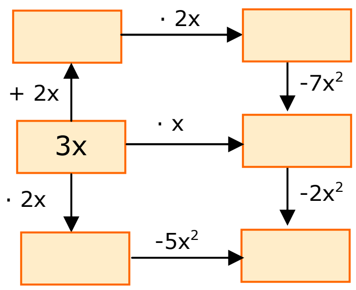
a) $-8x^4 + 3x^2 \cdot 2x^2$

b) $2x \cdot 5x + 4x \cdot 3x$

c) $5x^2 \cdot 2x^3 - 4x \cdot 2x^4$

d) $\frac{1}{2}x^2 \cdot 5x^2 + \frac{2}{3}x \cdot 5x^3$

13. Completa:



14. Completa:

a) $8x^4 + \ldots\ldots = 10x^4$

b) $\ldots\ldots - 6x^3 = 4x^3$

c) $\ldots\ldots \cdot 5x = 15x^3$

d) $8x \cdot \ldots\ldots \cdot 2x^6 = 32x^9$

15. Completa la ecuación $2x + \ldots = x + 5$ con un número sabiendo que tiene por solución $x = 4$.

16. Expresa en lenguaje algebraico:

a) Al sumar 10 al triple de un número se obtiene 46.

b) El doble de un número sumado a su triple es igual a 40.

c) La diferencia entre el triple de un número y su mitad es igual a 5.

d) El cuadrado de un número es igual a 121.

17. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x = -5$

b) $-2x = -6$

c) $6x = 0$

d) $x + 8 = -3$

e) $-x - 4 = 1$

f) $x - 2 = -1$

g) $2x - 3 = 3$

h) $4x - 5 = 2x$

18. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x + 2 = 5$

b) $4x + 6 = 2x$

c) $6x + 4 = -4x + 7$

d) $5x + 8 = 2x - 3$

e) $3x - 4 = -x + 1$

f) $3x - 2 = 5x - 1$

g) $3x - 4 = x + 3$

19. Identifica la incógnita y resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3 + 2y = 9$

b) $2d + 5 = 17$

c) $3m + 2 = m + 8$

d) $2t + 5 = 4t$

20. La suma de dos números es 45 y su diferencia 5. ¿Cuáles son estos números?

21. Al repartir 30 caramelos entre dos amigos, uno de ellos se ha quedado con 8 caramelos más que el otro. ¿Cuántos caramelos tiene cada uno de ellos?

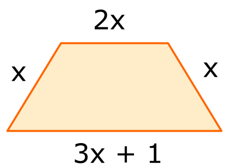
22. Halla las dimensiones de un rectángulo si su perímetro es 26 cm y la altura mide 3 cm menos que la base.

23. La medida de uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es el quíntuplo del otro. Halla la medida de dichos ángulos.

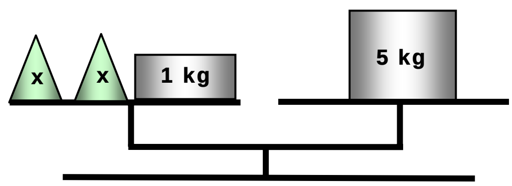
24. Juan tiene 12 años, Pedro 14 y Miguel 20. ¿Cuántos años hace que la suma de las edades de Juan y de Pedro era igual a la edad de Miguel?

25. Los tres finalistas de un concurso deben repartirse 2100 € de forma que cada uno de ellos reciba 500 € más que el que ocupa una posición inferior. ¿Qué cantidad de dinero recibe cada uno?

26. El perímetro del trapecio de la figura es 29 cm. Halla la medida de sus lados.



27. La balanza se encuentra en equilibrio. Halla el valor de x.



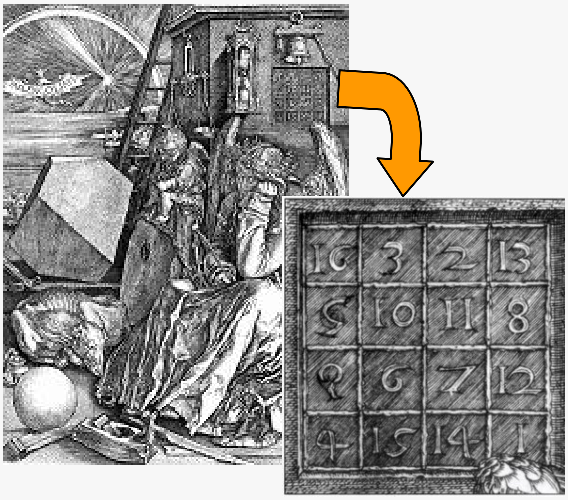
Para saber más

Cuadrados mágicos

Un **cuadrado mágico** consiste en la disposición de una serie de números de forma que al sumar las filas, las columnas o las diagonales se obtiene siempre el mismo valor. El cuadrado de la derecha es mágico ya que la suma de filas, columnas y diagonales es 15.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

En 1514, el pintor alemán Alberto Durero pintó un grabado, "La Melancolía", en el que aparece un cuadrado mágico



En una de las fachadas de la Sagrada Familia en Barcelona hay un cuadrado mágico que se debe al escultor José M. Subirachs

- ¿Sabrías hallar el valor de **x** de forma que este cuadrado sea mágico?

x+6	2x+2	5
x-1	6	3x+1
7	x+5	x

¿Qué es una identidad?

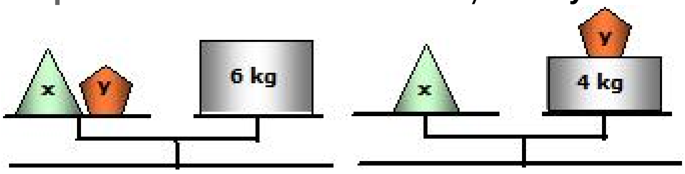
Una **identidad** es una igualdad algebraica que se verifica para cualquier valor de la letra.
En la igualdad algebraica **5x - 3x = 2x** comprueba que al sustituir la x por cualquier valor se verifica.
Así, **5x - 3x = 2x** es una identidad.

Un juego

Piensa un número, súmale **5**, multiplica el resultado obtenido por **6**, réstale **20**, súmale **5**, réstale **15** y finalmente divide el resultado entre **6**. ¿Obtienes el número que has pensado?.
Investiga por qué siempre obtienes el número que habías pensado.

Un problema

Halla el valor de **x** y el de **y**.



Una serie

¿Cómo completarías esta serie en la que cada número se obtiene sumando los dos anteriores?

3				39

Soluciones

Cuadrado mágico: x=3
Un juego: Al realizar las operaciones indicadas obtenemos x que es el número pensado.
Un problema: x=5, y=1
Una serie 3, 11, 14, 25, 39

Recuerda lo más importante

Lenguaje algebraico

El **lenguaje algebraico** expresa la información matemática mediante letras y números.

Una **expresión algebraica** es una combinación de letras, números y signos de operaciones. Mediante el lenguaje algebraico se puede realizar una **traducción de enunciados**.

Ejemplos de traducción de enunciados:

- El doble de un número **x** menos 12.
  2x – 12
- La edad de una persona dentro de 4 años si actualmente tiene **x** años.
  x + 4
- El número total de ruedas de **x** coches y de **y** bicicletas.
  4x + 2y

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el número que se obtiene al sustituir las letras por números y realizar las operaciones indicadas.

Ejemplos:

- El valor numérico de **5x–3** para x = **2** es:
  $5 \cdot 2 - 3 = 10 - 3 = \mathbf{7}$
- El valor numérico de $\mathbf{x^2 - 1}$ para x = **4** es:
  $4^2 - 1 = 16 - 1 = \mathbf{15}$
- El valor numérico de **2x+y** para x = **6** e y = **5** es:
  $2 \cdot 6 + 5 = 12 + 5 = \mathbf{17}$

Monomios

Un monomio es una expresión algebraica formada por el **producto** de un número y de una letra.

Un monomio consta de un **coeficiente** y de una **parte literal**.

El **grado** de un monomio es el exponente de la letra.

Ejemplos:

- El monomio $\mathbf{7x^3}$ tiene por coeficiente **7** por parte literal $\mathbf{x^3}$ y su grado es **3**.
- El monomio $\mathbf{-x^4}$ tiene por coeficiente **-1** por parte literal $\mathbf{x^4}$ y su grado es **4**.
- El monomio $\mathbf{6x^2y^3}$ tiene por coeficiente **6** por parte literal $\mathbf{x^2y^3}$ y su grado es **5**.

Para **sumar** o **restar monomios semejantes** se suman o restan los coeficientes y se deja la misma parte literal.

Para **multiplicar monomios** se multiplican los coeficientes y las partes literales.

Ejemplos:

$$7x^3 + 2x^3 = 9x^3$$

$$-x^4 + 8x^4 = 7x^4$$

$$10x^7 - 6x^7 + x^7 = 5x^7$$

$$4x^7 \cdot 6x^3 = 24x^{10}$$

$$x^4 \cdot 5x^3 = 5x^7$$

Ecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad algebraica que solo es cierta para un determinado valor de la incógnita.

Un número es **solución** de la ecuación si al sustituir la incógnita por este número la igualdad se verifica.

Resolver una ecuación consiste en hallar su solución.

Ejemplos de resolución de ecuaciones:

x + 3 = 2 x = 2 – 3 x = **-1**	**x – 2 = 5** x = 5 + 2 x = **7**
2x = 6 $x = \frac{6}{2}$ x = **3**	**5x – 6 = 4x** 5x – 4x = 6 x = 6

Se pueden **resolver problemas** en los que se plantea una relación de igualdad **mediante ecuaciones.**

Los pasos a seguir son:

- Identificar la incógnita.
- Plantear una ecuación.
- Resolver la ecuación planteada.
- Comprobar la solución obtenida.
- Dar la respuesta al problema.

Autoevaluación

1. Un tren circula a velocidad constante de 78 km/h. ¿Cuál de las siguientes expresiones indica la distancia que recorre en x horas?

1) x - 78

2) 78 + x

3) 78x

4) 78x + 78

2. Olga tiene 3 canicas más que Ana y Juan tiene 2 más que Ana. Si x representa el número de canicas de Ana, ¿cuál es la expresión algebraica que indica las que tienen entre los tres?

3. Halla el valor numérico de $6x^2 + 2x + 6$ para $x = 1$.

4. Efectúa la siguiente suma y la siguiente resta de monomios:

$4x^5 + 3x^5$ $\qquad$ $3x^4 - 18x^4$

5. El producto de dos monomios es $15x^7$ y uno de ellos es $3x^2$. ¿Cuál es el otro?

6. El valor numérico de un monomio de grado 3 para x = 2 es 16. ¿De qué monomio se trata?

7. La ecuación $3x + a = 24$ tiene por solución $x = 5$. Halla el valor de a.

8. Halla la solución de la siguiente ecuación:

$$8x - 6 = 4x + 2$$

9. Indica cual es la ecuación con la que puede resolverse el siguiente problema: “Si al triple de un número le restamos 12 obtenemos 21. ¿De qué número se trata?”

1) $3x - 12 = 21$

2) $12 - 3x = 21$

3) $3x + 12 = 21$

4) $3x - 21 = 12$

10. Miguel tiene una colección de cromos y compra otra colección formada por el mismo número de cromos. Después regala 60 cromos y le quedan 62. ¿Cuántos cromos tenía inicialmente?

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) $3x + 100$ b) $1{,}45x$
c) $1{,}16x$ d) $2(x - 5)$

2.

	Número de coches
Color blanco	**x**
Color rojo	$2x + 1$
Colar negro	$3x - 5$
Total	$6x - 4$

3. Para $x = 0$ es 6, para $x = 1$ es 2 y para $x = 3$ es 0.

4. 9

5. a) 7 b) 1 c) 30 d) - 35

6. a) $250 + 0{,}15x$ b) 310 €

7.

1	2	3	4	5	6	7	n
1	4	9	16	25	36	49	n^2

8.

	Área	Perímetro
1	$a \cdot c$	$2a + 2c$
2	$b \cdot c$	$2b + 2c$
3	$a \cdot d$	$2a + 2d$
4	$b \cdot d$	$2b + 2d$

9. $3x$, $5x$, $\frac{1}{2}x$; $8xy$, $-5xy$;

$-4x^2$, $\frac{1}{3}x^2$, $7x^2$

10. a) $10x$ b) $6x^2$
c) $-4x^3 + x^2$ d) $-x^4 + 18x^3$

11.

	x	4x	x^2
Doble	$2x$	$8x$	$2x^2$
Cuadrado	x^2	$16x^2$	x^4
Triple más 1	$3x+1$	$12x + 1$	$3x^2 + 1$

12. a) $-2x^4$ b) $22x^2$ c) $2x^5$ d) $\frac{35}{6}x^4$

13.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{5x} \arrow[r, "\cdot\, 2x"] & \boxed{10x^2} \arrow[d, "-7x^2"] \\
\boxed{3x} \arrow[u, "+\, 2x"] \arrow[r, "\cdot\, x"] \arrow[d, "\cdot\, 2x"'] & \boxed{3x^2} \arrow[d, "-2x^2"] \\
\boxed{6x^2} \arrow[r, "-5x^2"] & \boxed{x^2}
\end{tikzcd}$$

14. a) $2x^4$ b) $10x^3$ c) $3x^2$ d) $2x^2$

15. 1

16. a) $3x + 10 = 46$ b) $2x + 3x = 40$

c) $3x - \frac{1}{2}x = 5$ d) $x^2 = 121$

17. a) -1 b) 3 c) 0 d) -11

e) -5 f) 1 g) 3 h) $\frac{5}{2}$

18. a) 1 b) -3 c) $\frac{3}{10}$ d) $-\frac{11}{3}$

e) $\frac{5}{4}$ f) $-\frac{1}{2}$ g) $\frac{7}{2}$

19. a) y 3 b) d 6 c) m 3 d) t $\frac{5}{2}$

20. 20, 25

21. 11 caramelos y 19 caramelos

22. 5 cm y 8 cm

23. 15º y 75º

24. 6 años

25. 200 €, 700 € y 1200 €

26. 13 cm, 4 cm, 4 cm y 8 cm

27. 2 kg

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. respuesta nº 3)
2. $3x + 5$
3. 14
4. $7x^5$ $-15x^4$
5. $5x^5$
6. $2x^3$
7. 9
8. 2
9. respuesta nº 1)
10. 61 cromos

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

8

Geometría del plano

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

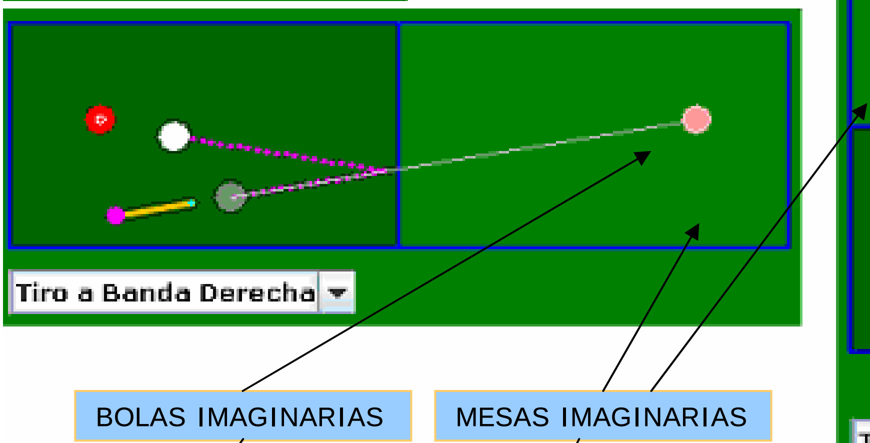
- Conocer los elementos del plano.
- Conocer las rectas y sus propiedades.
- Manipular rectas y otros elementos relacionados con ellas.
- Conocer los diferentes tipos de ángulos.
- Conocer los ángulos y sus propiedades.
- Medir ángulos y realizar operaciones con ellos.
- Utilizar recursos para resolver problemas sencillos de geometría plana.

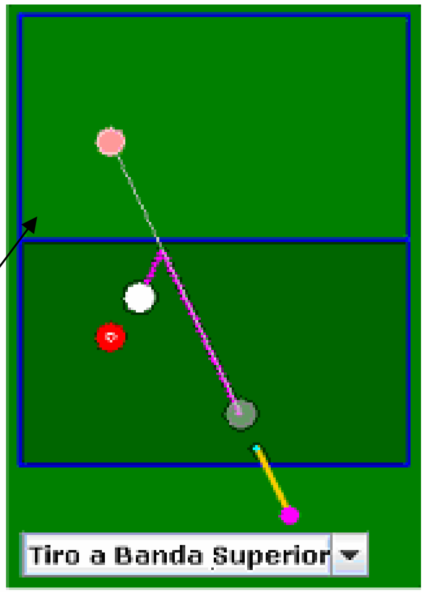
Antes de empezar

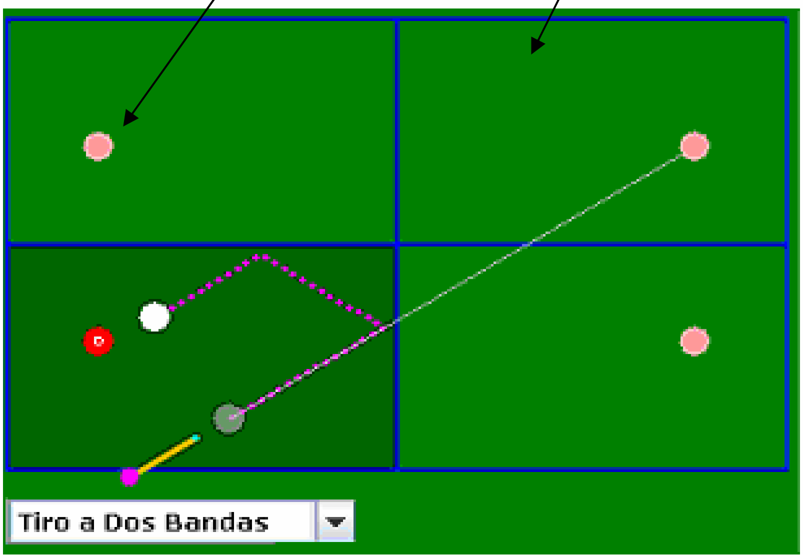
Investiga

En el juego del billar intervienen muchos elementos de la geometría plana, como puntos, rectas, ángulos, simetrías ... Observa en la escena de la derecha como se puede calcular la trayectoria correcta para dar a la bola roja rebotando antes en una o dos bandas.

En un tiro directo apuntamos a la bola roja. Si queremos tirar a banda, basta colocar otra mesa de billar imaginaria junto a la nuestra, que contenga una bola roja también imaginaria. Esta bola imaginaria es a la que apuntaremos.







En un tiro a dos bandas cuadruplicamos nuestra mesa para obtener una mesa real y tres imaginarias. Apuntando a la bola de la mesa que está en la esquina superior derecha, logramos dar a la roja tocando antes en dos bandas.

Las rectas, puntos, simetrías, ángulos y otros elementos geométricos son la base del juego del billar.

¡Y de muchas otras cosas!

1. Rectas. Paralelismo y perpendicularidad.

El plano.

Desde los inicios de la historia, el ser humano ha intentado representar su entorno visual dibujando los objetos y figuras que lo rodean.

Para ello ha necesitado disponer de alguna superficie sobre la que trazar puntos, líneas, círculos u otras figuras. Desde los petroglifos esculpidos en piedra a las pinturas renacentistas o a los modernos planos utilizados en la arquitectura o la ingeniería, disponemos de innumerables ejemplos de representaciones elaboradas sobre superficies más o menos planas.

El **plano** es por lo tanto un objeto que cobra importancia para la geometría, ya que nos permite representar figuras sobre él.

Puntos y rectas.

Dentro del plano distinguimos dos elementos fundamentales, tal y como **Euclides**, considerado como el primer gran matemático de la historia, los definió: el **punto** y la **recta**.

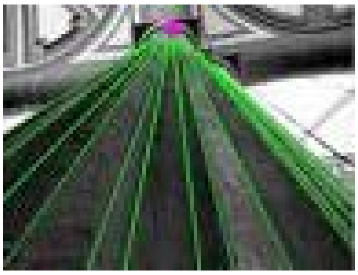
Así, podemos identificar una estrella como un punto en el firmamento, la estela dejada por un avión como una recta, y el tablero de nuestra mesa de trabajo como un plano.

Es todo lo que necesitamos para empezar a "hacer geometría".

Punto es lo que no tiene longitud ni anchura. **Recta** es lo que tiene longitud, pero no anchura.

No es difícil disfrutar de la geometría de manera espontánea. Es suficiente con percibir la forma de los objetos con espíritu observador para descubrir todo tipo de elementos geométricos en nuestro entorno más cercano.

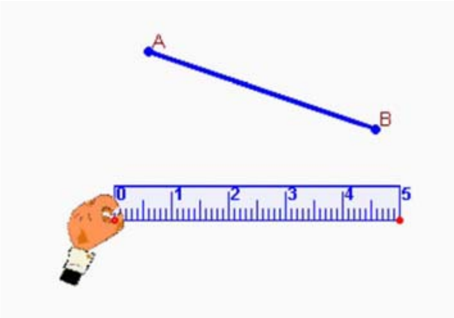
Y la geometría nos proporciona además una fuente inagotable de información útil.



Cuando observamos la vía del tren, con sus dos raíles paralelos ... ¡que terminan por unirse en el infinito!, obtenemos una valiosa información acerca de la distancia, de la que no dispondríamos si viésemos los raíles como realmente son, es decir, paralelos.

Prueba a buscar toda clase de objetos y propiedades geométricas a tu alrededor. Seguramente te sorprenderán en muchas ocasiones.

Recta, semirrecta y segmento.



Entre todas las distintas posibilidades que hay para unir dos puntos, el segmento es especial, por ser el camino más corto.

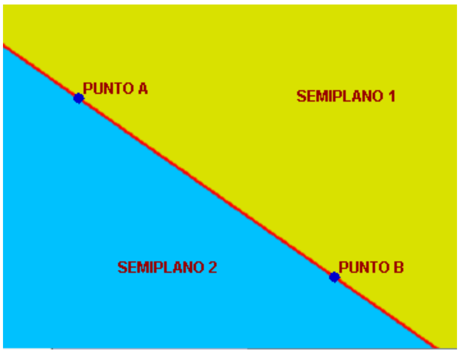
Tomemos dos puntos distintos sobre el plano y unámoslos mediante una línea. Existen desde luego muchas maneras de hacerlo, pero hay una de ellas que es la **más corta** entre todas las posibles. A esta línea más corta que une dos puntos la llamamos **segmento**.

Si designamos los dos puntos con las letras A y B, designaremos AB al segmento que los une. Así, A y B pasan a ser los **extremos** del segmento.

Si prolongamos el segmento indefinidamente por ambos extremos, obtenemos una **recta**.

Si prolongamos el segmento AB por uno solo de sus extremos (B por ejemplo) obtenemos una **semirrecta**. En este caso decimos que el punto A es el **origen** de esta semirrecta.

Toda recta divide al plano en dos regiones. Cada una es un **semiplano**.



Si un punto no pertenece a la recta, entonces estará en alguno de los dos semiplanos determinados por ella.

Propiedades de la recta.

Volviendo a Euclides, existen algunas propiedades de la recta que, a pesar de su sencillez, resultan absolutamente esenciales para la geometría.

Estas son algunas de ellas:

- 1ª propiedad: Dados dos puntos distintos en un plano, existe una única recta que los une.
- 2ª propiedad: Toda recta divide al plano en dos regiones, llamadas semiplanos.

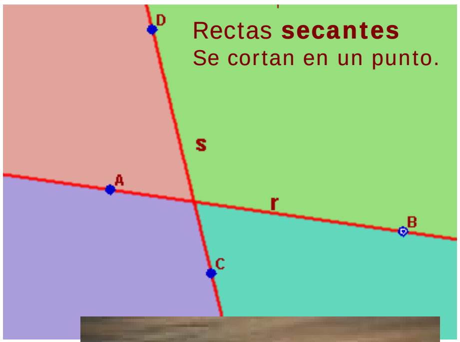
Dados dos puntos distintos en un plano, existe una **única** recta que los contiene.

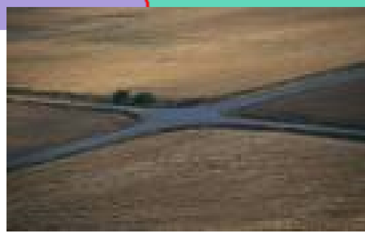
Posiciones relativas.

Tracemos dos rectas sobre un plano. Pueden ocurrir varios casos distintos.

Podría suceder que ambas rectas estén colocadas de manera superpuesta una a la otra. Sería imposible distinguirlas; serían, en definitiva, una misma recta. Decimos que las dos rectas son **coincidentes**.

Si las rectas son distintas, podría ser que no llegaran a tocarse nunca (decimos en este caso que son rectas **paralelas**) o bien que se toquen en algún punto. En este último caso decimos que son **secantes** y el punto en que se cortan es único.





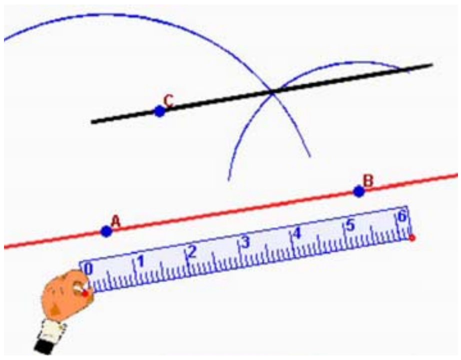
> Dos rectas son **paralelas** si no se cortan en ningún punto y son **secantes** si se cortan en un único punto.

Paralelismo.

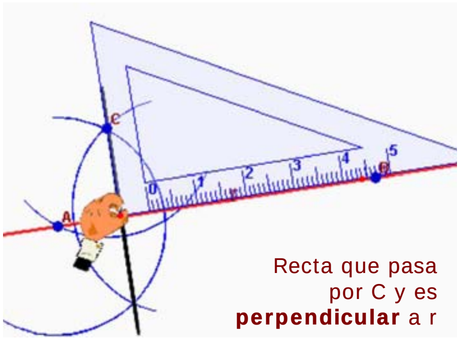
Sabemos ya que dos rectas son paralelas si no tienen ningún punto común y, como consecuencia de su famoso **5º postulado**, Euclides afirmó que por cualquier punto exterior a una recta puede trazarse una única recta paralela a ella.

Podemos así trazar paralelas a una recta, utilizando una **regla** y un **compás**. El método es el que se describe en la escena contigua.

De acuerdo con nuestro Euclides, el paralelismo es uno de los conceptos básicos de la geometría. Por este motivo, la geometría que estamos descubriendo recibe el nombre de **"geometría euclídea"**.



> Por un punto exterior a una recta se puede trazar una **única** recta paralela a ella.



Recta que pasa por C y es **perpendicular** a r

Perpendicularidad.

Dos rectas que se cortan en un punto, dividen al plano en **cuatro** regiones. Si estas cuatro regiones tienen la misma amplitud, decimos que las dos rectas son **perpendiculares**.

Dada una recta y un punto cualquiera sobre ella, existe una única recta perpendicular a la primera y que contiene a ese punto.

Disponemos de un método para trazar rectas perpendiculares usando regla y compás.

> Dos rectas son **perpendiculares** si dividen al plano en cuatro regiones de igual amplitud.

EJERCICIOS resueltos

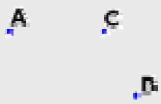
1. Traza tres rectas diferentes que contengan a un punto A. ¿Cuántas rectas más puedes trazar que pasen por ese punto?

   Sol Por un punto se puede trazar un número infinito de rectas distintas.

2. Traza dos rectas distintas que contengan a la vez a dos puntos A y B. ¿Es esto posible? Explícalo con tus propias palabras.

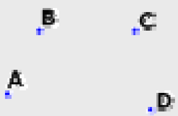
   Sol Por dos puntos distintos sólo es posible trazar una recta.

3. ¿Es posible trazar una recta que contenga a los tres puntos A, B y C? ¿Cómo se deben situar los tres puntos para que se pueda trazar una recta que los contenga?

   Sol No es posible en este caso, ya que por tres puntos distintos se puede trazar una recta siempre que estén alineados.

4. Representa el segmento AB, una semirrecta con origen en C, una semirrecta con origen en D y que contenga al punto B, una recta que pase por A y una recta que pase por A y por C.

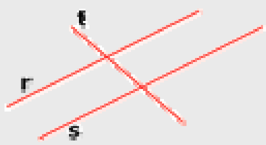
   

   Sol Revisa la página Recta, semirrecta y segmento.

5. Traza la recta r que une los puntos A y B. Representa los siguientes puntos: un punto, distinto de A y de B, que pertenezca a la recta; dos puntos que no pertenezcan a la recta y que estén situados en distintos semiplanos.

   Sol Revisa la página Propiedades de la recta.

6. Indica si las rectas siguientes son coincidentes, paralelas o secantes.

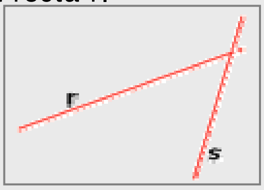
   

   Sol Las rectas r y s son paralelas. La recta t es secante con r y con s.

EJERCICIOS resueltos

7. Representa en tu libreta dos rectas paralelas y otra secante a la recta r.

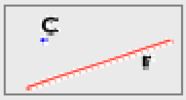
Sol Revisa la página Posiciones relativas.



8. Traza una recta paralela a r y otra paralela a s. ¿Qué figura forman los puntos de corte de las cuatro rectas?

Sol Forman un paralelogramo.

9. Utilizando una regla y un compás, traza una recta paralela a r que pase por el punto C.

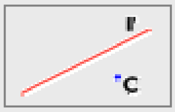


Sol Revisar la página Paralelismo.

10. En la figura del ejercicio anterior traza una nueva recta paralela a r. ¿Cómo son entre sí las dos rectas trazadas?

Sol Las tres rectas son paralelas.

11. Utilizando una regla y un compás, traza una recta s que sea perpendicular a r y que pase por el punto C.



Sol Revisar la página Perpendicularidad.

12. Sobre la recta s construida en el ejercicio anterior, marca un punto D que no esté en r y traza otra recta perpendicular a s que pase por el punto D. ¿Qué relación existe entre la recta r y esta última que acabas de representar?

Sol Son paralelas.

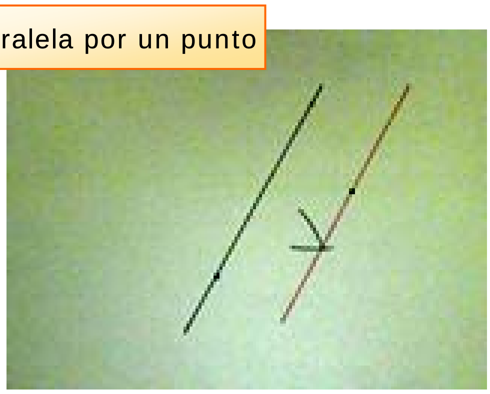
13. Traza tres rectas perpendiculares a la recta r. ¿Cómo son entre sí estas tres rectas?

Sol Todas las rectas perpendiculares a r son paralelas entre sí.

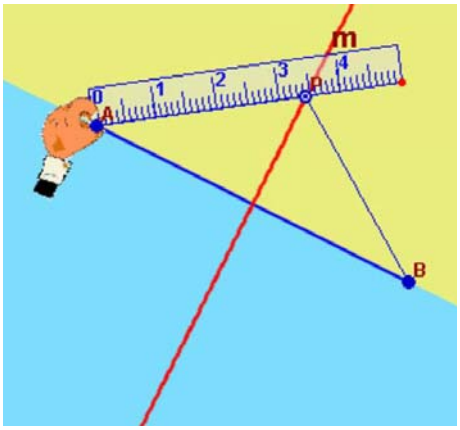
Aquí tienes ejemplos de trazado con regla y compás. En las páginas correspondientes dispones de un vídeo en el que se muestran ambas construcciones.

Perpendicular por un punto

Paralela por un punto



2. Mediatriz de un segmento.



Definición de mediatriz.

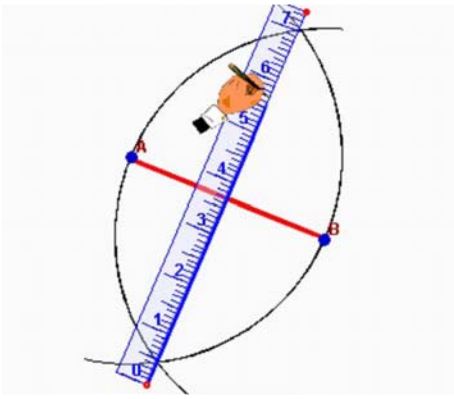
Dados dos puntos A y B, podemos construir el **segmento** AB que los une.

Se llama **mediatriz** del segmento AB a la recta que es perpendicular a este segmento y que pasa por su punto medio.

La mediatriz divide al segmento AB en otros dos segmentos de igual longitud.

La recta mediatriz tiene una importante propiedad: la distancia de cualquier punto de esa recta a cada uno de los dos extremos del segmento AB es la misma.

La **mediatriz** es perpendicular al segmento AB y lo divide en dos partes iguales.



Mediatriz de un segmento

Construcción de la mediatriz.

Vamos a construir la mediatriz de un segmento utilizando, como en casos anteriores, la regla y el compás.

Para ello representa dos puntos y traza el segmento que los une utilizando la regla.

Coloca el compás sobre uno de los extremos del segmento y ábrelo para que coincida con el otro extremo. Traza así una circunferencia. Haz la misma operación apoyando el compás sobre el otro extremo.

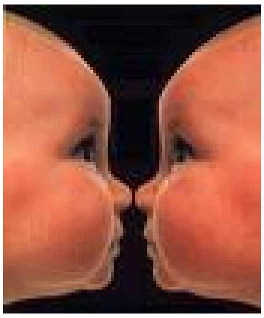
Une ahora los puntos donde se cortan las dos circunferencias que acabas de trazar. El nuevo segmento es perpendicular al inicial y si lo prolongas obtendrás la recta mediatriz que buscabas.

Simetría.

Dada una recta y un punto C que no pertenezca a ella, vamos a buscar otro punto C' con la condición de que la recta sea la **mediatriz** del segmento CC'.

El punto C' así buscado se llamará **simétrico de C** y la recta se llamará **eje de simetría**.

Este tipo de simetría se denomina **reflexión** y se puede aplicar a cualquier figura geométrica. Para ello representamos los simétricos de todos los vértices de la figura original y obtenemos así otra figura simétrica a la primera.



La reflexión produce figuras **simétricas** de forma similar a como actúa un espejo.

Simétrico de un punto

EJERCICIOS resueltos

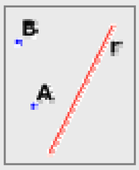
14. Con regla y compás traza el segmento AB y su mediatriz.

Sol Revisa la página Construcción de la mediatriz.

15. Sobre la mediatriz trazada en el ejercicio anterior, marca un punto cualquiera y mide la distancia entre este punto y los dos extremos del segmento inicial. ¿Qué observas en el resultado obtenido?

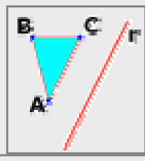
Sol La distancia de cualquier punto de la mediatriz a uno u otro extremo del segmento es la misma.

16. Traza el segmento que une los puntos A y B. Localiza los puntos simétricos de A y B con respecto a la recta r y únelos mediante un segmento. ¿Qué relación existe entre los dos segmentos?



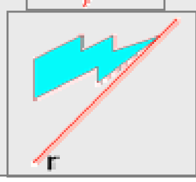
Sol Son segmentos simétricos con respecto a la recta r y su longitud es la misma.

17. Realiza el mismo ejercicio anterior, partiendo del triángulo de vértices A, B y C. ¿Qúe se obtiene?



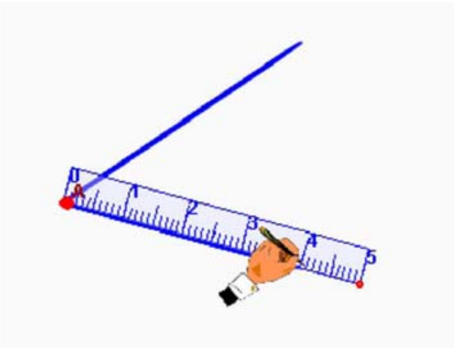
Sol La figura obtenida es otro triángulo simétrico al original.

18. Representa la figura simétrica de la que aparece a continuación.



Sol Revisa la página Simetría.

3. Ángulos. Clasificación y medida.



Definición de ángulo.

Piensa en un plano sin bordes, o lo que es lo mismo, ilimitado. Representa un punto A, al que llamaremos **vértice**, y traza dos semirrectas con origen en este punto, a las que llamaremos **lados**.

El plano queda así dividido en dos regiones que comparten el vértice y los lados. Cada una de estas regiones se llama **ángulo**.

Resulta evidente que las dos regiones pueden tener distinto tamaño. Llamaremos **amplitud del ángulo** al tamaño de cada una de ellas. Atendiendo a ella, identificaremos distintos tipos de ángulos, estableceremos relaciones entre ellos y mediremos las amplitudes.

Llamamos **ángulo** a cada una de las dos regiones en que queda dividido el plano al trazar dos semirrectas con el mismo origen.

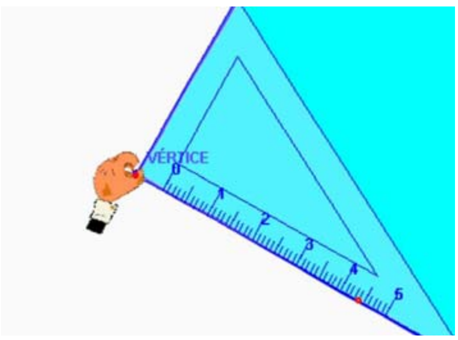
Tipos de ángulos.

Por su amplitud clasificamos los ángulos en:

- **Ángulo recto**: es el comprendido entre dos semirrectas perpendiculares.
- **Ángulo llano**: es el que resulta al trazar dos semirrectas de igual origen y sentido opuesto.
- **Ángulo nulo**: es el que resulta al trazar dos semirrectas con igual origen e idéntico sentido.

Por comparación con el ángulo recto:

Un ángulo es **agudo** si es de menor amplitud que el ángulo recto. Es **obtuso** si tiene mayor amplitud que un recto y menor que un llano.



Por comparación con el ángulo llano:

Un ángulo es **convexo** si es de menor amplitud que el ángulo llano. Es **cóncavo** si su amplitud es mayor que la del ángulo llano.

Relaciones entre ángulos.

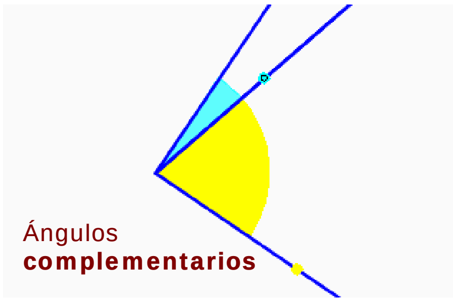
Decimos que dos ángulos son **consecutivos** si tienen el vértice y un lado en común y decimos que son **iguales** si tienen la misma amplitud.

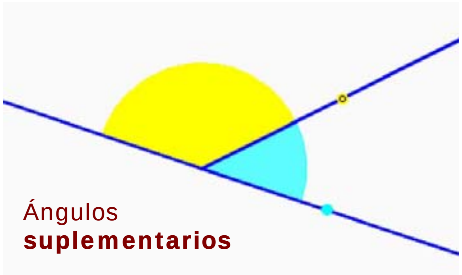
Dos ángulos son **complementarios** si en posición de consecutivos equivalen a un recto.

Dos ángulos son **suplementarios** si en posición de consecutivos equivalen a un llano.

Dos rectas que se cortan en un punto determinan cuatro ángulos que son iguales dos a dos. Decimos en este caso que los pares de ángulos de la misma amplitud son **opuestos por el vértice**.

Dos ángulos **complementarios** equivalen a uno recto. Dos ángulos **suplementarios** equivalen a uno llano.





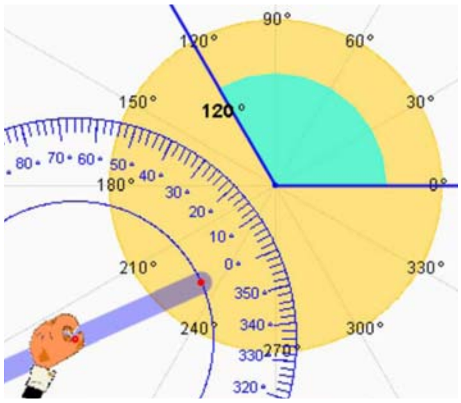
Medida de ángulos.

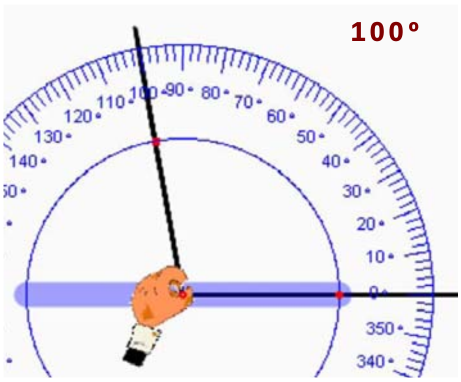
Para medir la amplitud de un ángulo utilizaremos como unidad el **grado**, representado por el símbolo "º". Asignamos al **ángulo nulo** una amplitud de 0º y al **ángulo recto** una amplitud de 90º.

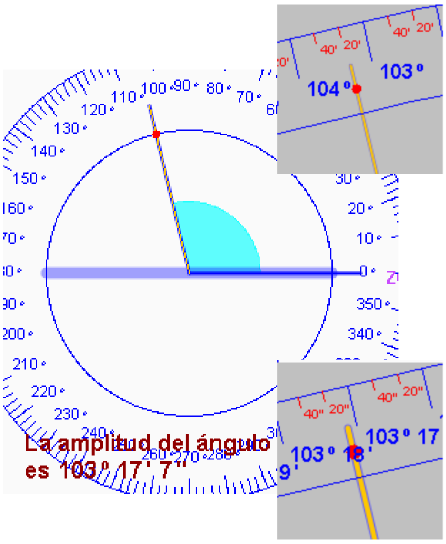
Dos ángulos rectos equivalen a uno **llano**, que tendrá por tanto una amplitud de 180º. Y cuatro ángulos rectos (o dos llanos) ocupan **todo el plano**, cuya amplitud será de 360º.

El resto de los ángulos se medirán por comparación con estos. Por ejemplo, si dividimos un recto en dos ángulos iguales, obtendremos dos **ángulos de 45º**. Si dividimos en cambio un recto en tres partes iguales, obtendremos tres **ángulos de 30º**.como unidad el **grado**, representado por el símbolo "º". Asignamos al **ángulo nulo** una amplitud de 0º y al **ángulo recto** una amplitud de 90º.

Al dividir una circunferencia en 360 partes iguales obtenemos **un grado**.







Sistema sexagesimal.

Para medir la amplitud de ángulos con mayor precisión se utiliza el sistema **sexagesimal**.

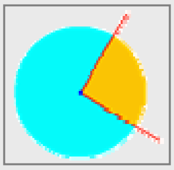
Este sistema consiste en dividir un grado en 60 partes iguales. A cada una de estas divisiones la llamamos **minuto**, de manera que cada grado contiene 60 minutos. De igual forma, cada minuto se divide en 60 partes iguales para obtener un **segundo** y obtenemos la siguiente equivalencia:

1 **grado** = 60 **minutos** = 3 600 **segundos**

Utilizando este sistema de medida diremos, por ejemplo, que la amplitud de un ángulo es 25 grados, 31 minutos y 7 segundos, y lo escribiremos así:

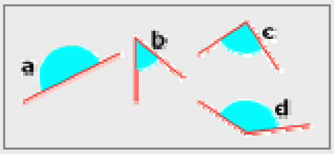
25º 31' 7''

EJERCICIOS resueltos



19. Indica sobre la figura el vértice, los lados y los angulos que se observan.

Sol Revisa la página Definición de ángulo.

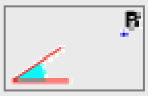


20. Indica sobre la figura si estos ángulos son agudos, rectos, obtusos o llanos.

Sol El ángulo a es llano, b es agudo, c es recto y d es obtuso.

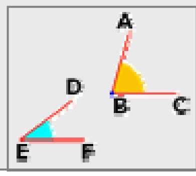
21. Representa utilizando los instrumentos de dibujo un ángulo recto, un ángulo llano, un ángulo nulo, un ángulo agudo, un ángulo obtuso, un ángulo cóncavo y un ángulo convexo.

Sol Revisa la página Tipos de ángulos.



22. Representa sobre el vértice B un ángulo igual al que aparece en la figura.

Sol Construye sobre el punto B dos semirrectas paralelas a cada uno de los lados del ángulos original.



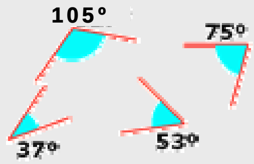
23. Representa sobre el vértice B un ángulo igual al ángulo DEF y que sea consecutivo al ángulo ABC.

Sol Utiliza el transportador de ángulos.

EJERCICIOS resueltos

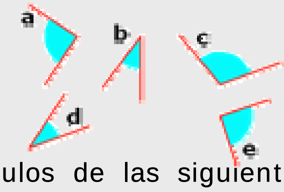
24. Indica cuáles de los ángulos que aparecen en la figura son complementarios y cuáles suplementarios.

Sol Son complementarios los ángulos de 37º y 53º porque suman un recto; son suplementarios los ángulos de 105º y 75º porque suman un llano.



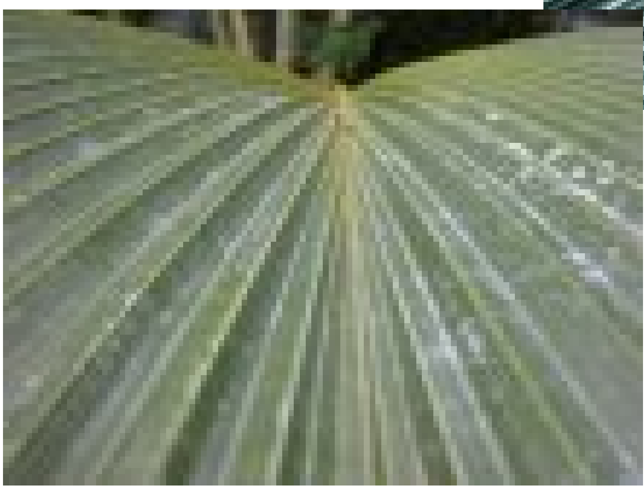
25. Señala en la figura los ángulos que tienen la misma amplitud. ¿Qué nombre reciben estos ángulos?

Sol Decimos que son iguales los ángulos que tienen la misma amplitud. En ela figura, los ángulos a y e son iguales (son rectos) y los ángulos b y d también son iguales.

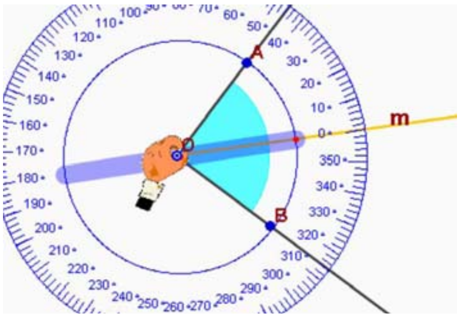


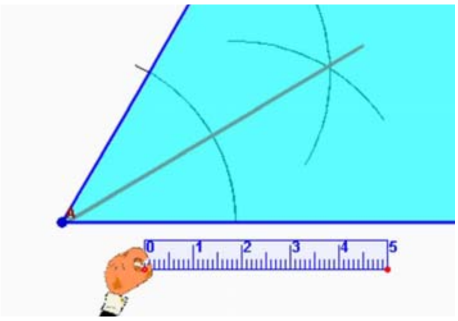
26. Representa utilizando los instrumentos de dibujo los ángulos de las siguientes amplitudes: 30º, 60º, 90º, 45º, 10º, 135º y 240º.

Sol Revisa la página <u>Medida de ángulos</u>.



4. Definición de bisectriz.





Bisectriz de un ángulo

Definición de bisectriz.

Tomemos un ángulo de vértice A y lados m y n. Tracemos una nueva semirrecta con origen A y que divida al ángulo en otros dos que sean iguales. Esta semirrecta recibe el nombre de **bisectriz** del ángulo.

La bisectriz tiene la siguiente propiedad: cualquier punto de la bisectriz está a **igual distancia** de los dos lados del ángulo.

> La **bisectriz** divide un ángulo en otros dos iguales.

Construcción de la bisectriz.

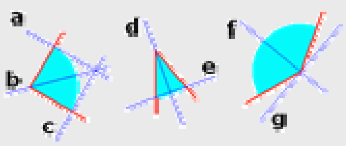
Los instrumentos básicos de la geometría plana permiten trazar la bisectriz de un ángulo.

Traza dos semirrectas con un mismo origen, que será el **vértice** A del ángulo. Coloca el compás sobre A y traza un arco de circunferencia que corte a los dos lados, en los puntos B y C.

Traza otros dos arcos, uno de centro B y radio C y el segundo con centro C y radio B.

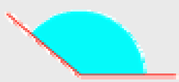
Une por fin el vértice A con el punto donde se cortan los dos arcos que acabas de trazar y obtendrás la bisectriz del ángulo.

EJERCICIOS resueltos



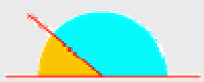
27. Indica sobre la figura cual es la bisectriz de los ángulos representados.

Sol Las bisectrices son las rectas b, d y f, respectivamente.



28. Traza sobre la figura la bisectriz del ángulo representado.

Sol Revisa la página Construcción de la bisectriz.



29. Traza las bisectrices de los dos ángulos consecutivos que aparecen en la figura. ¿Qué relación guardan entre sí estas dos bisectrices?

Sol Si los ángulos son suplementarios, como en este caso, las dos bisectrices son perpendiculares entre sí.

5. Operaciones con ángulos.

Suma de ángulos.

Dos o más ángulos pueden sumarse para formar otro.

La operación **suma** de ángulos se realiza tanto gráficamente como analíticamente.

La suma **gráfica** se realiza colocando los ángulos en posición de consecutivos, es decir, compartiendo el vértice y un lado, para dar lugar a otro ángulo que comprende a ambos.

Analíticamente, la operación se realiza sumando las amplitudes de los ángulos para obtener la amplitud del ángulo resultante.

EJEMPLO

138º + 97º = 235º

> La **suma** analítica de ángulos se realiza sumando las **amplitudes** de cada uno de ellos.

Resta de ángulos.

La **resta** o diferencia de ángulos puede hacerse, igual que la suma, de dos formas: gráfica y analítica.

Gráficamente, basta colocar los dos ángulos de manera que compartan el vértice y un lado. Así, el ángulo mayor comprende al menor, y el exceso es la diferencia entre ambos.

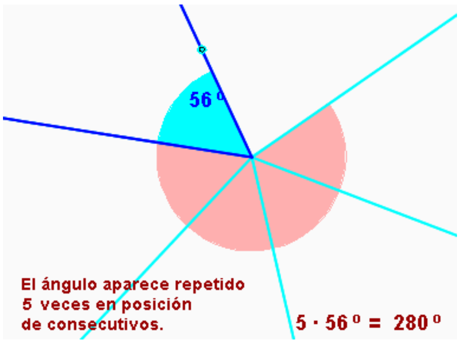
La resta **analítica** se realiza restando la amplitud del ángulo menor de la del mayor.

EJEMPLO

253º – 166º = 87º

> Para **restar** analíticamente dos ángulos calculamos la **diferencia** entre el ángulo mayor y el menor.

Multiplicación por un número.



EJEMPLO

7 · 46º = 322º

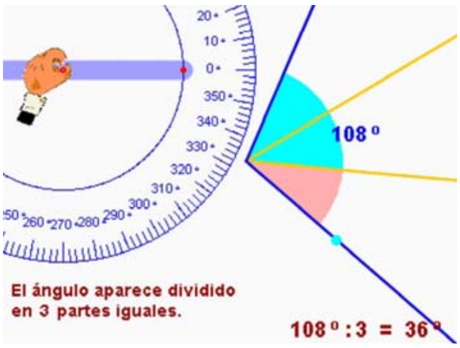
Multiplicar un ángulo por un número natural equivale a sumar el ángulo consigo mismo tantas veces como indique el número.

Para multiplicar **gráficamente** un ángulo por un número natural basta colocar el ángulo en posición de consecutivo consigo mismo tantas veces como indique el número.

La operación **analítica** de multiplicar se realiza multiplicando el número por la amplitud del ángulo.

Para **multiplicar** analíticamente un ángulo por un número natural multiplicamos el número por la amplitud del ángulo correspondiente.

División por un número.



EJEMPLO

253º : 11 = 23º

En el caso de que no sea exacta, necesitamos más herramientas matemáticas para calcular el resultado de la división. Alguna de estas herramientas se explica en el siguiente apartado.

La **división** de un ángulo por un número natural consiste en repartir el ángulo en tantas partes iguales como nos indique el número.

La división se realiza de forma **analítica** dividiendo la amplitud del ángulo entre el número natural correspondiente.

La división **gráfica** resulta compleja ya que no siempre se puede hacer con regla y compás. Esto sucede, por ejemplo, con la división de un ángulo en tres partes iguales (el famoso problema de la **trisección del ángulo**), imposible para la mayor parte de los ángulos.

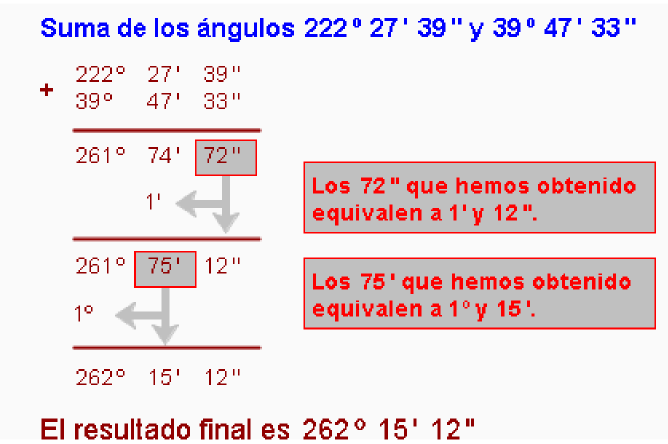
En cambio, siempre es posible calcular la división de un ángulo en dos partes iguales gráficamente, cosa que ya hemos hecho cuando aprendimos a trazar la bisectriz de un ángulo.

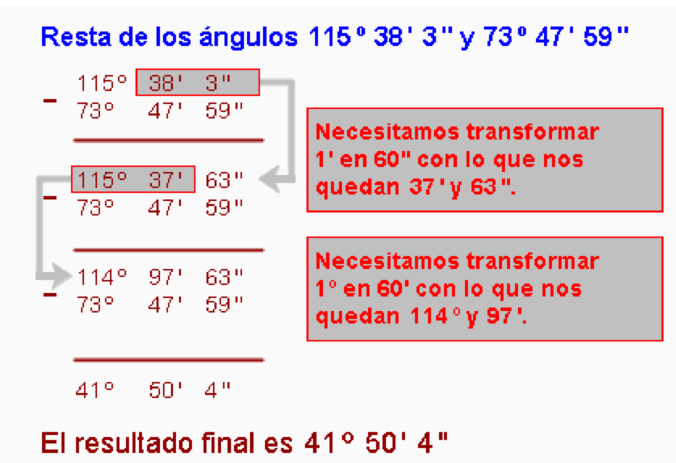
Operaciones en forma compleja.

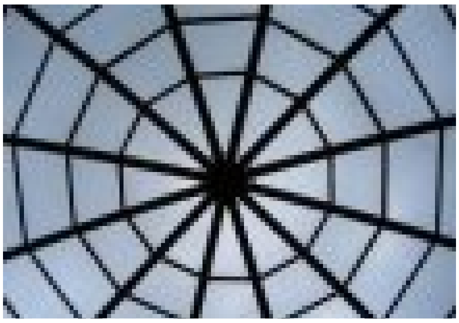
Para operar con ángulos expresados en forma **compleja** (grados, minutos y segundos), daremos los pasos que se describen en la escena, recordando que 1 grado equivale a 60 minutos (**1º=60'**) y que 1 minuto equivale a 60 segundos (**1'=60''**).

Así, y siempre que sea necesario y posible, podremos **agrupar** 60 segundos para obtener un minuto, o bien 60 minutos para obtener un grado. De igual forma, si es necesario, podremos transformar un grado en 60 minutos o un minuto en 60 segundos.

En **forma compleja** se operan por separado los grados, minutos y segundos.







SUMA de ángulos en forma compleja

En primer lugar sumaremos los segundos. Si esta suma es igual o superior a 60'', llevaremos un minuto y anotaremos los segundos restantes.

Para los minutos realizaremos la misma operación, contando con el que hemos llevado en el paso anterior. En el caso de que tengamos 60 o más minutos, llevaremos un grado.

Finalmente sumaremos los grados, contando con el que nos hemos llevado, de ser el caso.

RESTA de ángulos en forma compleja

El método para la resta comienza también por los segundos. Si en el minuendo tenemos un número suficiente de segundos, restamos los que hay en el sustraendo.

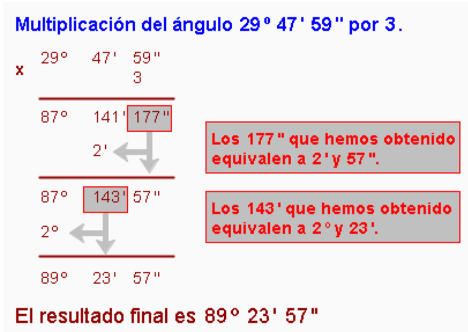
En caso contrario, deberemos "traer" un minuto del minuendo y convertirlo en 60''. De esta forma reunimos una cantidad suficiente de segundos en el minuendo y restamos de manera natural.

El proceso se repite ahora con los minutos, teniendo en cuenta que si hemos necesitado convertir en segundos, tendremos ya un minuto menos en el minuendo. Si los minutos que nos quedan en el minuendo son suficientes procedemos a la resta. Si no es así, deberemos traer un grado, que equivale a 60'. Finalmente restamos los grados, descontando, en su caso, el que hayamos llevado anteriormente.

MULTIPLICACIÓN de ángulos por un número

Comenzamos multiplicando los segundos, minutos y grados por separado. Una vez obtenidos estos productos, agrupamos los segundos de 60 en 60. Cada grupo que obtengamos representa un minuto más a añadir a los minutos resultantes de la multiplicación.

Una vez hecho esto, repetimos el proceso con los minutos que hemos obtenido, agrupándolos de 60 en 60. Cada uno de estos grupos será un grado que añadiremos a los grados que hayan resultado de la multiplicación.



DIVISIÓN de ángulos por un número

Empezamos esta vez por los grados, dividiéndolos de forma natural. El resto de esta primera división, se convertirá en minutos que se añadirán a los que tengamos para dividir. Hecho esto, procedemos a la división de los minutos.

De igual forma que antes, el resto de la división de los minutos habrá de convertirse en segundos y añadirlo a los que haya inicialmente, antes de pasar a su división. El resto de esta última fase es el resto final de la operación de dividir.

EJERCICIOS resueltos

30. Cálcula de forma gráfica y analítica la suma de los ángulos de 110º y 40º.

Sol Para la suma gráfica revisa la página Suma de ángulos.

La suma analítica es $110^o+40^o=150^o$.

31. Calcula de forma gráfica y analítica la resta de los ángulos de 163º y 34º.

Sol Para la resta gráfica revisa la página Resta de ángulos.

La resta analítica es $163^o+34^o=29^o$.

32. Calcula el resultado de las siguientes operaciones con ángulos: a. 73^o-36^o , b. $28^o-(123^o-118^o)$, c. $2\cdot72^o+3\cdot15^o$, d. $90^o:5$, e. $130^o-2\cdot20^o+(180^o-60^o):3$

Sol a. $73^o-36^o=37^o$, b. $28^o-(123^o-118^o)=23^o$, c. $2\cdot72^o+3\cdot15^o=189^o$, d. $90^o:5=18^o$, e. $130^o-2\cdot20^o+(180^o-60^o):3=150^o$

33. Calcula el ángulo que describe el minutero de un reloj cuando pasa de las 3:20 a las 4:00.

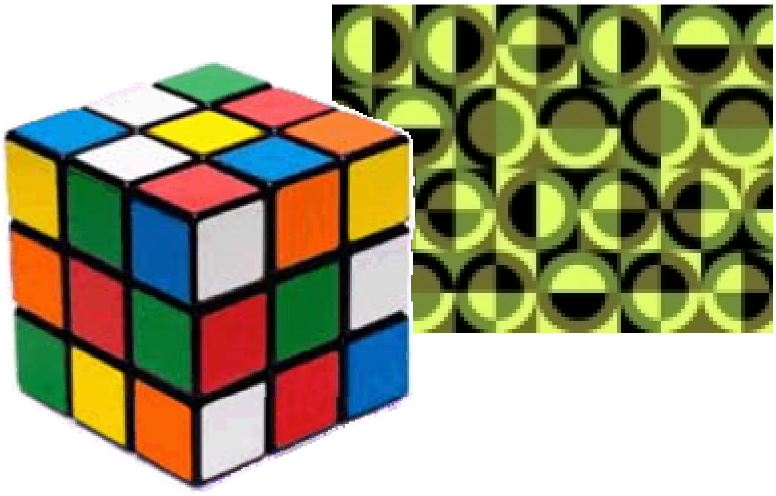
Sol El minutero dá una vuelta completa, es decir 360º, en una hora, que equivale a 6º cada minuto, así que en 40 minutos describe un ángulo de 240º.

34. Calcula el ángulo que describe la aguja horaria de un reloj en los siguientes casos: las 2:00 y las 2:47 y entre las 2:34 y las 7:11.

Sol La aguja horaria avanza 30º por hora, que equivale a medio grado cada minuto. Con esta relación y teniendo en cuenta el ejercicio anterior, los ángulos descritos son90º, 30º, 15º, 23º 30' y 138º 30', respectivamente.

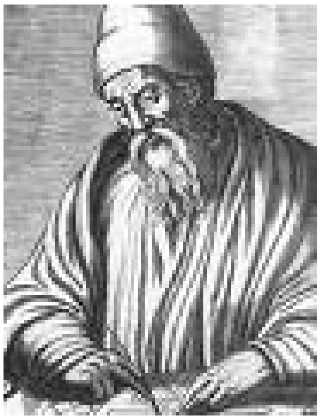
Para practicar

1. Si dos rectas tienen un punto en común ¿cuál es su posición relativa? ¿Y si son dos puntos comunes? ¿Y si no tienen ninguno?
2. Si m es la mediatriz del segmento AB y D es un punto de la recta m cuál es la distancia de D a A, sabiendo que la distancia de D a B es 5,52 ?
3. Clasifica los ángulos de 0º, 45º, 90, 135º, 180º y 225º según su amplitud y según su comparación con los ángulos agudo y llano.
4. Dado un ángulo de amplitud 37º ¿cuál es la amplitud de su complementario? ¿Y la de su suplementario?
5. De qué amplitud son los cuatro ángulos que se obtienen al trazar la recta bisectriz de un ángulo de 170º?
6. Realiza la siguiente operación con ángulos: $95^{o}+124^{o}-24^{o}$
7. Realiza la siguiente operación con ángulos: $3\cdot 27^{o}+5\cdot 19^{o}$
8. Realiza la siguiente división: $52^{o}:4$
9. Realiza la siguiente operación: $128^{o}\ 28'\ 23''+91^{o}\ 32'\ 49''$
10. Realiza la siguiente operación: $330^{o}\ 32'\ 43''-83^{o}\ 56'\ 47''$
11. Realiza la siguiente operación: $31^{o}\ 38'\ 9''\cdot 7$
12. Realiza la siguiente operación: $117^{o}\ 15'\ 34'':8$
13. Realiza con regla y compás la construcción geométrica de una recta perpendicular a otra.
14. Realiza con regla y compás la construcción geométrica de una recta paralela a otra.
15. Realiza con regla y compás la construcción geométrica de la mediatriz de un segmento.
16. Realiza con regla y compás la construcción geométrica de la bisectriz de un ángulo.
17. Realiza con regla y compás la construcción geométrica del punto simétrico con respecto a una recta.

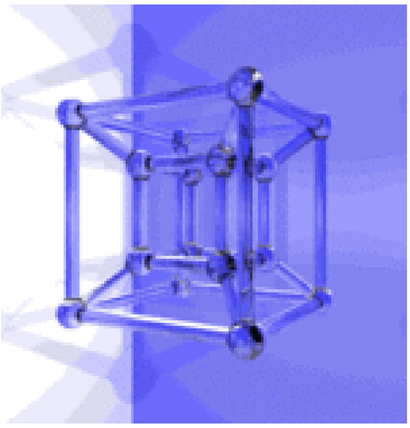


Para saber más

El maestro Euclides



Euclides está considerado como el primer gran matemático de la historia. ¿El motivo? Ser el primero en organizar un discurso matemático, partiendo de casi nada, y utilizando de forma estricta el razonamiento matemático, método científico que caracteriza de manera esencial a la matemática frente a otras disciplinas científicas.



Su gran aportación son los "**Elementos de Geometría**", libro organizado en trece tomos en el que, sobre las ideas fundamentales de **punto**, **recta**, **superficie** y **ángulo**, establece sus famosos **cinco postulados**. Con pocas herramientas fue capaz de recoger gran parte de los conocimientos geométricos existentes hasta nuestros días.

Todo lo que sabemos acerca de ángulos y rectas, figuras planas como triángulos y circunferencias, paralelismo y perpendicularidad, áreas y muchísimo más fue completamente terminado por él.

Hasta que en el siglo XIX algunos grandes nombres de la matemática moderna pudieron ampliar el horizonte que había marcado Euclides. Para ello eliminaron el famoso 5º postulado de Euclides, conocido también como "Postulado de las paralelas", y se sumergieron en mundos geométricos completamente nuevos, en los que las rectas paralelas se encuentran, o en los que la suma de los ángulos de un triángulo no es 180º.

Muchas personas sintieron vértigo ante estos extraños mundos, hasta que pasado algún tiempo nos fuimos dando cuenta de que, en algunos casos, se parecen más al nuestro de lo que parece. Si deseas más información, puedes buscar los nombres de Riemann, Lobatchevski, Bolyai o Gauss, responsables en gran medida de la evolución de la geometría hacia nuevas metas que guardan una relación directa con las más modernas teorías sobre el origen del Universo. ¡Abróchense los cinturones!

Recuerda lo más importante

Rectas

Los elementos fundamentales de la geometría plana son los **puntos** y las **rectas**.

La linea **recta** es la más corta entre dos puntos.

Dos rectas son **paralelas** si no se cortan en ningún punto y son **secantes** si se cortan en un punto.

Dos rectas son **perpendiculares** si dividen al plano en cuatro regiones de la misma amplitud.

Mediatriz de un segmento es una recta perpendicular a este segmento y que lo corta en dos partes iguales.

Se dice que dos puntos A y B son **simétricos** con respecto a una recta, si esta recta es la mediatriz del segmento AB.

Ángulos

Ángulo es cada una de las dos regiones en que dos semirrectas con el mismo origen dividen al plano. Los ángulos pueden clasificarse con arreglo a distintos criterios:

- con relación a su amplitud: **recto**, **llano**, **nulo**;
- en comparación con el ángulo recto: **agudo**, **obtuso**;
- en comparación con el ángulo llano: **cóncavo**, **convexo**.

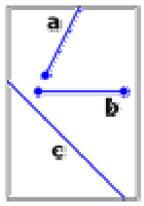
Al dividir una circunferencia en 360 partes iguales se obtiene un **grado**. Así, la circunferencia completa mide 360º, el ángulo recto mide 90º y el llano mide 180º.

Se llama **bisectriz** de un ángulo a la semirrecta que lo divide en dos partes iguales.

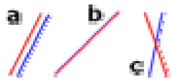
La suma y resta de ángulos se realiza sumando o restando las amplitudes de cada uno de ellos.

Autoevaluación

1. Relaciona cada elemento con su nombre correspondiente.



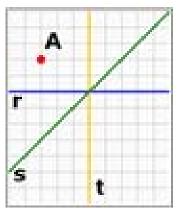
2. Indica la posición relativa de los pares de rectas.



3. Si una recta es perpendicular a otras dos rectas, ¿cómo son estas dos rectas entre sí?

4. ¿Cómo se llama la recta perpendicular a un segmento y que lo divide en dos partes iguales?

5. Señala el punto simétrico de A con respecto a cada uno de los ejes r, s y t.



6. En cuántos ángulos queda dividido el plano al trazar dos rectas secantes?

7. Calcula la amplitud del complementario y del suplementario del ángulo de 64º.

8. ¿Cómo son entre sí las bisectrices de dos ángulos suplementarios?

9. Calcula el resultado de sumar los ángulos de 17º, 36º y 42º.

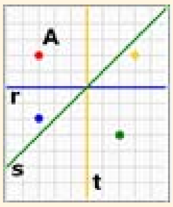
10. Calcula el resultado de la operación con ángulos que se indica: $2 \cdot 138^{\circ} - (53^{\circ} + 16^{\circ})$

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. Las rectas son secantes si tienen un punto en común, coincidentes si tienen dos puntos en común o paralelas si no tienen ninguno.
2. La distancia del punto D a A es la misma que de D a B. En este caso esa distancia es $d(D,A)=5{,}52$.
3. La clasificación es:
   0º ...... Nulo .... Agudo..... Convexo
   45º .... Agudo .... Convexo
   90º .... Recto ..... Convexo
   135º .. Obtuso ... Convexo
   180º .. Llano
   225º .. Cóncavo
4. El complementario de 37º es 53º y el suplementario 143º.
5. Se obtienen dos ángulos de 85º y otros dos de 95º.
6. $95^{\circ}+124^{\circ}-24^{\circ}=195^{\circ}$
7. $3\cdot 27^{\circ}+5\cdot 19^{\circ}=176^{\circ}$
8. $52^{\circ}:4=13^{\circ}$
9. El resultado es 220º 1' 12''.
10. El resultado es 246º 35' 56''.
11. El resultado es 221º 27' 3''.
12. El resultado es 14º 39' 26'' y resto 6''.
13. Revisa el video de la construcción de la perpendicular.
14. Revisa el video de la construcción de la paralela.
15. Revisa el video de la construcción de la mediatriz.
16. Revisa el video de la construcción de la bisectriz.
17. Revisa el video de la construcción del punto simétrico.

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. a. semirrecta; b. segmento; c. recta.
2. a. paralelas; b. coincidentes; c. secantes.
3. Son paralelas.
4. Mediatriz.
5. Los puntos simétricos son los representados en los colores que se corresponden con cada recta.



6. En cuatro.
7. El complementario es 26º y el suplementario es 116º.
8. Son perpendiculares.
9. El resultado de la suma es 95º.
10. $2\cdot 138^{\circ}-(53^{\circ}+16^{\circ})=207^{\circ}$.

No olvides enviar las actividades al tutor

9

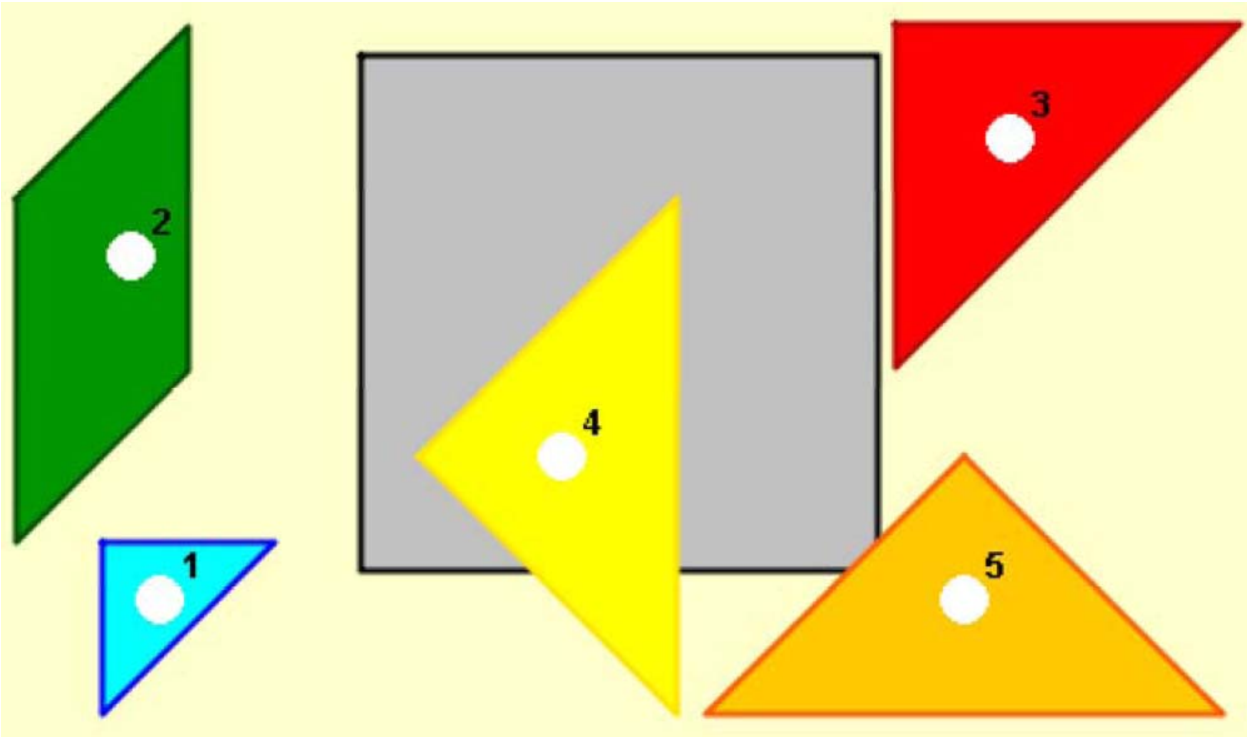
Polígonos, perímetros y áreas

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

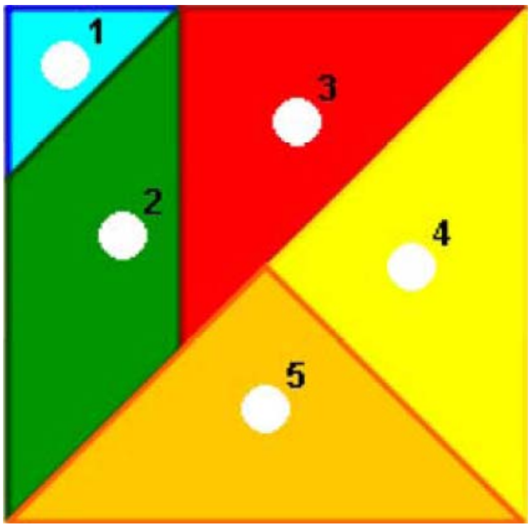
- Reconocer, representar e identificar los elementos geométricos que caracterizan a diferentes polígonos.
- Construir triángulos.
- Reconocer las rectas y puntos notables de los triángulos.
- Reconocer y dibujar diferentes tipos de cuadriláteros.
- Reconocer otros polígonos.
- Calcular perímetros de polígonos.
- Calcular áreas de diferentes polígonos.
- Aplicar el cálculo de superficies de polígonos a situaciones de la vida real.

Antes de empezar



Tangram de cinco piezas

Recorta las piezas superiores y sin mirar la solución, intenta construir un cuadrado con todas ellas. Después intenta construir otras figuras.



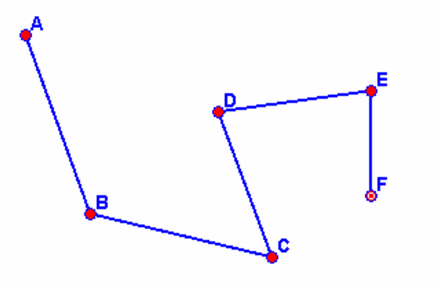
Investiga

¿Qué otro tangram se basa en la división de un cuadrado? ¿Cuántas piezas tiene?

1. Líneas poligonales

Definición y tipos. Polígonos

Una **linea poligonal** es un conjunto de **segmentos concatenados**, (cada uno empieza donde acaba el anterior), y pueden ser: **abiertas** o **cerradas**.

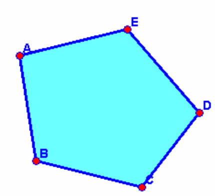


Línea poligonal abierta

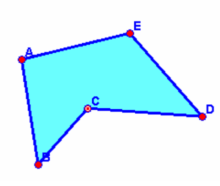
> La **superficie** contenida por una **línea poligonal cerrada** se llama **polígono**.

Los polígonos pueden ser:

- **Convexos:** todos sus ángulos interiores son menores de 180º.
- **Cóncavos**: algunos de sus ángulos interiores son mayores de 180º.



Polígono convexo



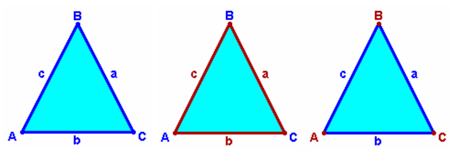
Polígono cóncavo

Como podrás ver más adelante en este tema, también se clasifican en: **regulares** e **irregulares** y según su número de lados.

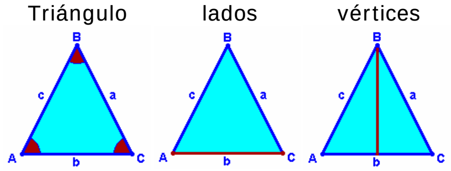
2. Triángulos

Elementos y clasificación

Un **triángulo** es un polígono de tres lados. Sus elementos característicos son: lados, base, altura, vértices y ángulos.



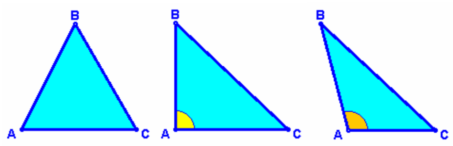
Triángulo lados vértices



ángulos base altura

Los triángulos se pueden clasificar según sus ángulos en:

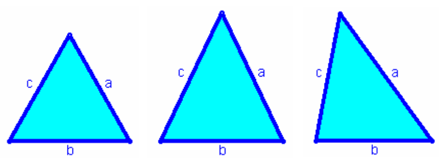
- **Acutángulos:** los tres ángulos agudos.
- **Rectángulos:** un ángulo recto y dos agudos.
- **Obtusángulos:** un ángulo obtuso y dos agudos.



Triángulo acutángulo | Triángulo rectángulo | Triángulo obtusángulo

Según sus lados se clasifican en:

- **Equiláteros:** los tres lados iguales.
- **Isósceles:** dos lados iguales y uno distinto.
- **Escalenos:** los tres lados distintos.

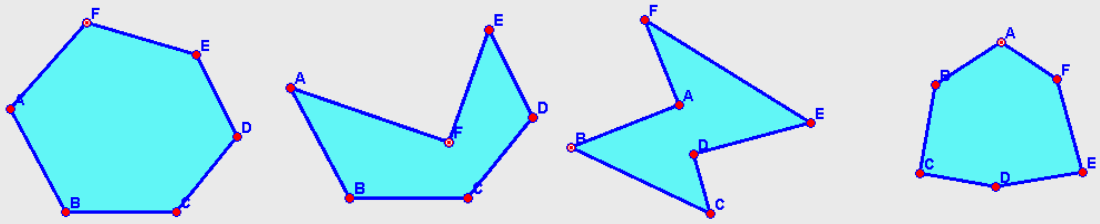


Triángulo equilátero | Triángulo Isósceles | Triángulo escaleno

> Un **triángulo** es un polígono de tres lados.

EJERCICIOS resueltos

1. Indica si los siguientes polígonos son convexos o cóncavos:



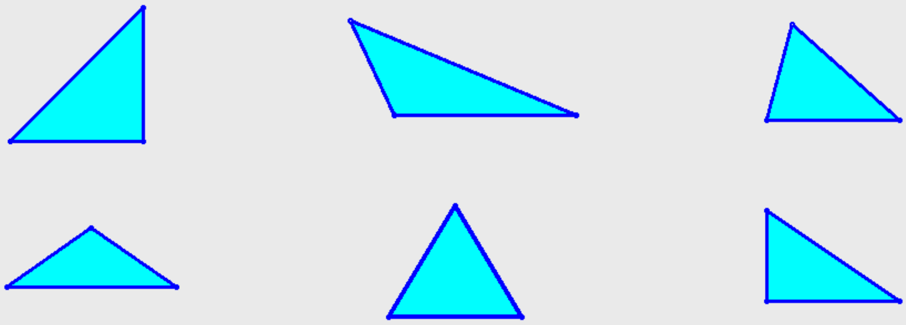
a) Convexo: todos sus ángulos interiores son menores de 180º.

b) Cóncavo: el ángulo F es mayor de 180º.

c) Cóncavo: los ángulos A y D son mayores de 180º.

d) Convexo: todos sus ángulos interiores son menores de 180º.

2. Clasifica los siguientes triángulos según sus lados y según sus ángulos:



a) Isósceles y rectángulo.

b) Escaleno y obtusángulo.

c) Escaleno y acutángulo.

d) Isósceles y obtusángulo.

e) Equilátero y acutángulo.

f) Escaleno y rectángulo.

3. Completa la siguiente tabla indicando en las casillas en blanco SI o NO, según sea o no posible que un triángulo pueda, a la vez, de los tipos que indica la fila y la columna:

	Equilátero	Isósceles	Escaleno
Acutángulo			
Rectángulo			
Obtusángulo			

	Equilátero	Isósceles	Escaleno
Acutángulo	SI	SI	SI
Rectángulo	NO	SI	SI
Obtusángulo	NO	SI	SI

Construcción de triángulos

Para construir un **triángulo** se deben dar uno de los tres casos siguientes:

- **Que conozcamos sus tres lados.**

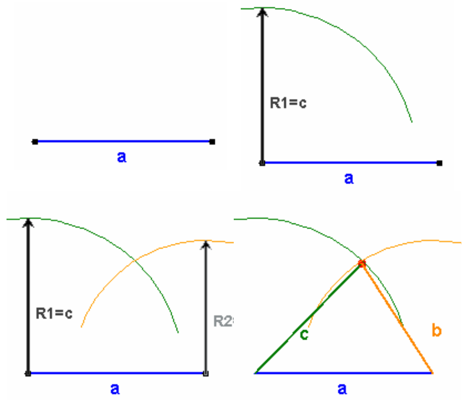
Se toma uno de los segmentos como base.

Con centro en uno de los extremos de este segmento, se traza un arco de radio la longitud de uno de los lados restantes.

Con centro en el otro extremo de la base se traza un arco de radio la longitud del tercer lado.

La intersección de los dos arcos es el tercer vértice del triángulo.

✓ Observa que para que se pueda construir el triángulo la suma de las longitudes de b y de c debe ser mayor que la longitud de a.



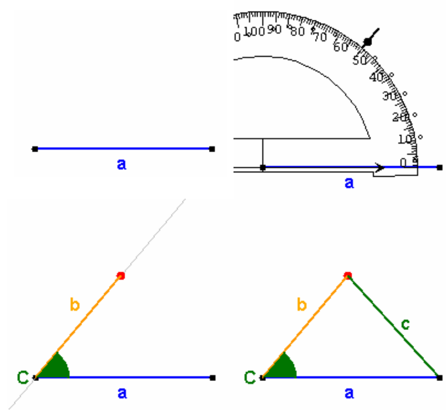
- **Que conozcamos dos lados y el ángulo comprendido.**

Se toma uno de los segmentos como base.

A partir de este lado y con vértice en uno de sus extremos, se mide un ángulo igual al conocido.

Se traza una recta que sea el otro lado del ángulo medido. Sobre esta recta, a partir del vértice del ángulo, se traza el segundo lado conocido.

Finalmente se unen con un segmento los dos vértices que faltan para determinar el triángulo.



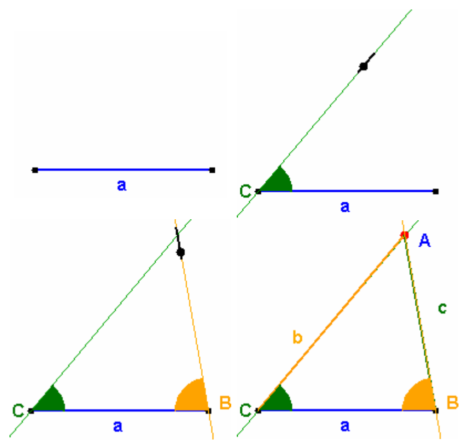
- **Que conozcamos dos ángulos y el lado común a ambos.**

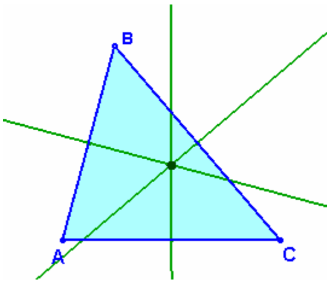
Se toma el segmento conocido como base.

Tomando este segmento como lado, a partir de uno de sus extremos se mide un ángulo igual a uno de los conocidos. Se traza una recta que forme con el segmento ese ángulo.

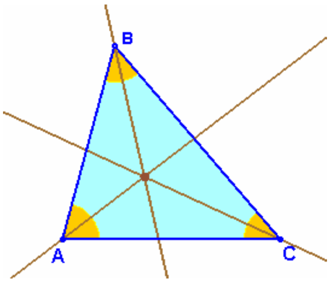
A partir del otro extremo, se mide un ángulo igual al otro que se conoce. Se traza una recta que forme con el segmento ese ángulo.

El punto de intersección de las dos rectas trazadas es el tercer vértice del triángulo.

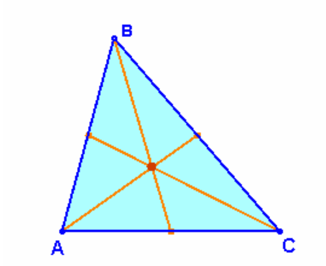




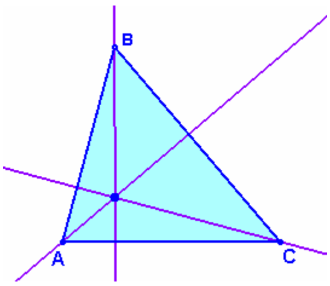
Mediatrices y circuncentro



Bisectrices e incentro



Medianas y baricentro



Alturas y ortocentro

Rectas y puntos notables

En un **triángulo** se definen cuatro tipos de rectas denominadas, genéricamente, **rectas notables**. Esas rectas son:

- **Mediatrices:** rectas perpendiculares a cada uno de los lados por su punto medio.
- **Bisectrices:** rectas que dividen a cada uno de los ángulos en dos ángulos iguales.
- **Medianas:** son los segmentos que van de cada vértice al punto medio del lado opuesto.
- **Alturas:** rectas perpendiculares a cada uno de los lados que pasan por el vértice opuesto.

En un triángulo tendremos tres rectas de cada tipo.

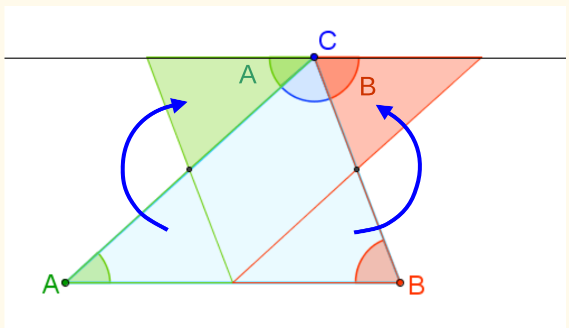
Los puntos de intersección de dichas rectas se denominan **puntos notables** y son:

- **Circuncentro:** punto de intersección de las tres mediatrices.
- **Incentro**: punto de intersección de las tres bisectrices.
- **Baricentro:** punto de intersección de las tres medianas.
- **Ortocentro:** punto de intersección de las tres alturas.

¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo?

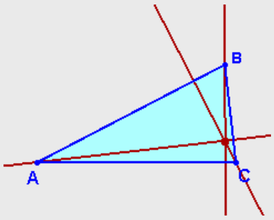
Como puedes apreciar en el dibujo

A + B + C = 180º

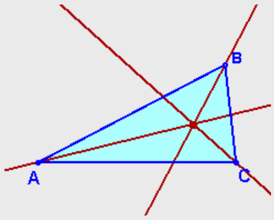


EJERCICIOS resueltos

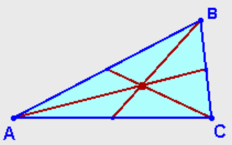
4. Indica las rectas notables y el punto que aparecen representados en cada gráfico:



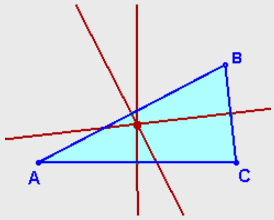
Alturas y ortocentro



Bisectrices e incentro

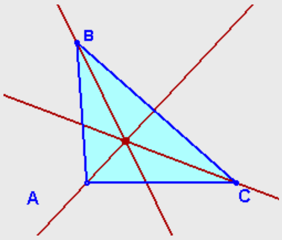


Medianas y baricentro

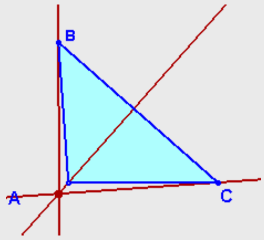


Mediatrices, circuncentro

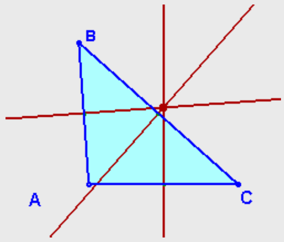
5. Indica las rectas notables y el punto que aparecen representados en cada gráfico:



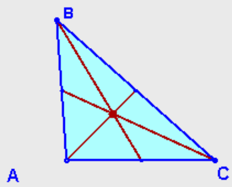
Bisectrices e incentro



Alturas y ortocentro



Mediatrices, circuncentro



Medianas y baricentro

6. Dibuja un triángulo cuyos lados midan 6, 7 y 8 centímetros. ¿Cómo es el triángulo según sus lados y según sus ángulos? Traza todas las rectas y puntos notables. ¿Dónde están situados los puntos notables?

El triángulo es escaleno porque los tres lados son distintos y acutángulo porque todos sus ángulos son agudos. Todos los puntos notables están en el interior.

7. Dibuja un triángulo cuyos lados midan 6, 8 y 10 centímetros. ¿Cómo es el triángulo según sus lados y según sus ángulos? Traza todas las rectas y puntos notables. ¿Dónde están situados los puntos notables?

El triángulo es escaleno porque los tres lados son distintos y rectángulo porque tiene un ángulo recto. El circuncentro coincide con el punto medio de la hipotenusa. El ortocentro coincide con el vértice del ángulo recto. El baricentro y el incentro están en el interior.

8. Dibuja un triángulo cuyos lados midan 6, 8 y 12 centímetros. ¿Cómo es el triángulo según sus lados y según sus ángulos? Traza todas las rectas y puntos notables. ¿Dónde están situados los puntos notables?

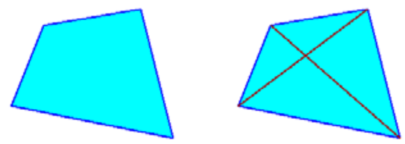
El triángulo es escaleno porque los tres lados son distintos y obtusángulo porque tiene un ángulo obtuso. El circuncentro y el ortocentro quedan fuera del triángulo. El baricentro y el incentro están en el interior.

9. Dibuja un triángulo cuyos lados midan 6, 6 y 6 centímetros. ¿Cómo es el triángulo según sus lados y según sus ángulos? Traza todas las rectas y puntos notables. ¿Qué ocurre con las rectas y los puntos notables?

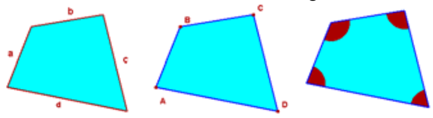
El triángulo es equilátero y acutángulo, todos los ángulos miden 60º. Las rectas y los puntos notables coinciden.

3. Cuadriláteros

Elementos y clasificación



Cuadrilátero Diagonales

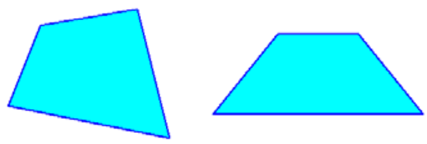


lados vértices ángulos

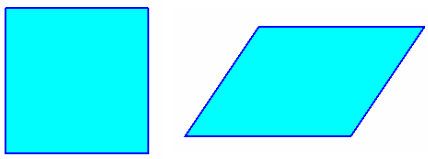
Un **cuadrilátero** es un polígono de cuatro lados. Sus elementos característicos son: lados, vértices, ángulos y diagonales.

Los triángulos se pueden clasificar según el paralelismo entre sus lados en:

- **Trapezoides:** no tiene lados paralelos.
- **Trapecios:** tiene dos lados paralelos.
- **Paralelogramos**: los lados opuestos son paralelos.



Trapezoide Trapecio



Paralelogramos

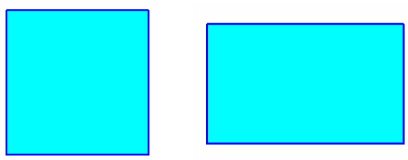
Un **cuadrilátero** es un polígono de cuatro lados.

Paralelogramos

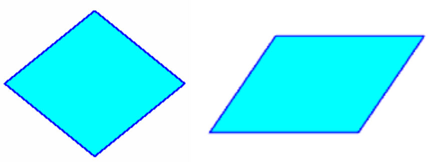
Un **paralelogramo** es un cuadrilátero cuyos lados opuestos siempre son paralelos, tal como se mostraba en el apartado anterior.

Los paralelogramos se pueden clasificar atendiendo a sus ángulos y a sus lados en:

- **Cuadrados:** sus cuatro lados son iguales y sus cuatro ángulos también.
- **Rectángulos:** sus lados opuestos son iguales y sus cuatro ángulos son iguales.
- **Rombos:** sus cuatro lados son iguales y sus ángulos opuestos son iguales.
- **Romboides:** sus lados opuestos son iguales y sus ángulos opuestos son iguales.



Cuadrado Rectángulo

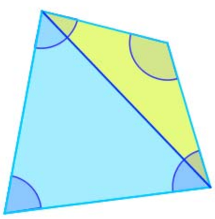


Rombo Romboide

Un **paralelogramo** es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.

¿Cuánto suman los ángulos interiores de un cuadrilátero‘

La diagonal lo divide en dos triángulos, la suma de los ángulos del cuadrilátero es:

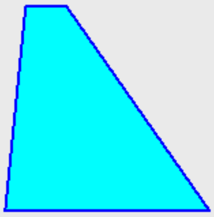


180º+180º=**360º**

EJERCICIOS resueltos

10. Clasifica los siguientes cuadriláteros:

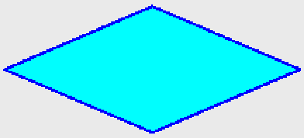
a)



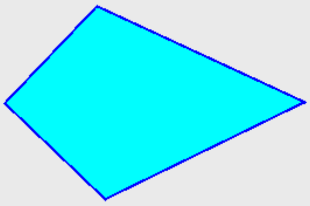
b)

c)

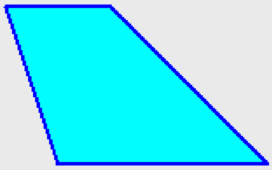
d)



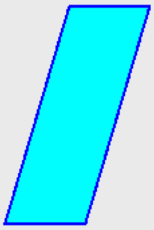
e)



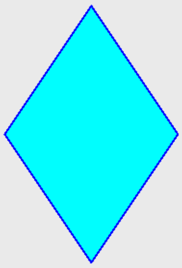
f)



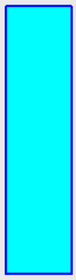
g)



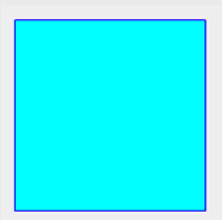
h)



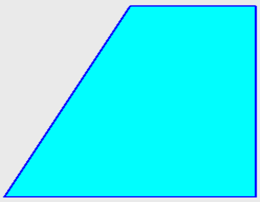
i)



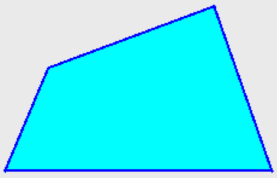
j)



k)

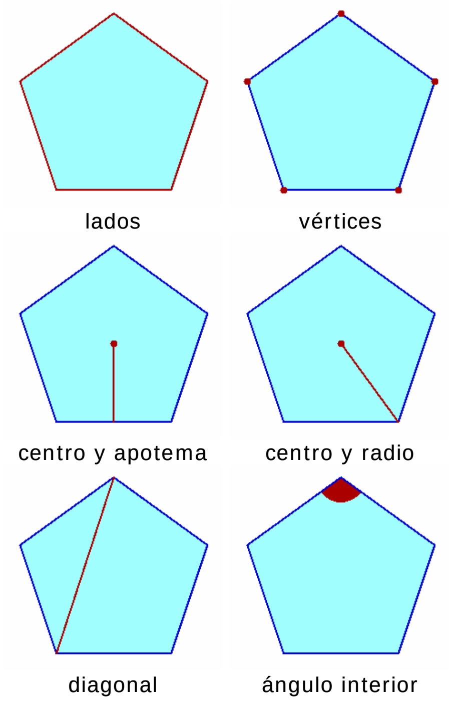


l)



a) Trapecio	b) Rectángulo	c) Romboide
d) Rombo	e) Trapezoide	f) Trapecio
g) Romboide	h) Rombo	i) Rectángulo
j) Cuadrado	k) Trapecio	l) Trapezoide

4. Polígonos regulares

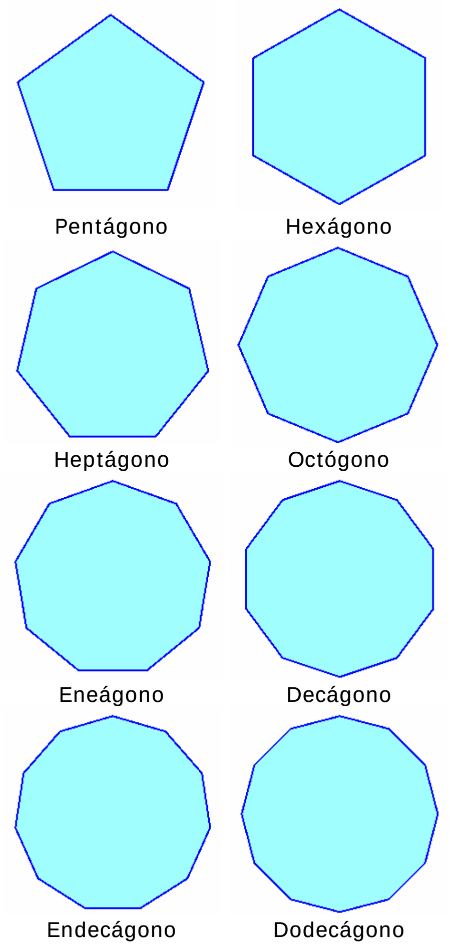


Elementos.

> Un **polígono regular** es aquél cuyos lados tienen la misma longitud y cuyos ángulos son iguales

Sus elementos característicos son:

- **Lado**: cada uno de los segmentos de la línea poligonal cerrada.
- **Vértice**: cada uno de los puntos comunes a dos lados consecutivos.
- **Centro**: punto que equidista de todos los vértices.
- **Apotema**: segmento que une el centro del polígono con el punto medio de cada lado.
- **Radio**: segmento que une el centro del polígono con cada uno de los vértices.
- **Diagonal**: segmento cuyos extremos son dos vértices no consecutivos.
- **Ángulo interior**: cada uno de los ángulos formados por dos vértices no consecutivos.



Cada polígono regular recibe un nombre según su número de lados:

- De tres lados: triángulo equilátero.
- De cuatro lados: cuadrado.
- De cinco lados: pentágono.
- De seis lados: hexágono.
- De siete lados: heptágono.
- De ocho lados: octógono.
- De nueve lados: eneágono.
- De diez lados: decágono.
- De once lados: endecágono.
- De doce lados: dodecágono.
- De trece o más lados: no se le da ningún nombre, se habla de polígono regular de 13, 14, …, lados.

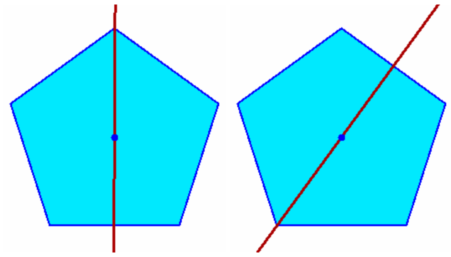
Ejes de simetría

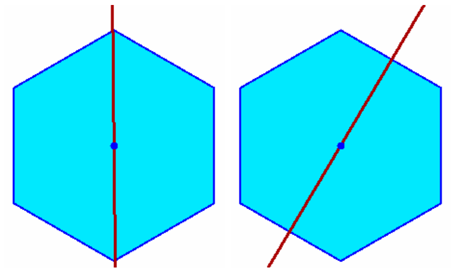
Una línea que cruza una figura geométrica es un **eje de simetría** si la divide en dos partes de manera que si doblamos por dicho eje una de esas partes se superpone coincidiendo totalmente con la otra.

Observa las similitudes y diferencias, respecto a los ejes de simetría, que muestran los polígonos según tengan un **número par o impar de lados**.

Un eje de simetría de un polígono regular con un número impar de lados pasa por cada uno de los vértices y por el punto medio del vértice opuesto.

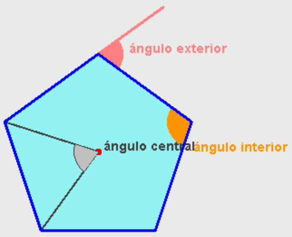
Un polígono regular con un número par de lados tiene dos tipos de ejes de simetría, uno une dos vértices opuestos y otro, une los puntos medios de dos lados opuestos.


Eje de simetría de un pentágono

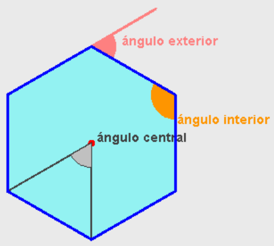

Ejes de simetría de un hexágono

EJERCICIOS resueltos

11. Calcula el valor de los ángulos central, interior y exterior en un pentágono regular y en un exágono regular:

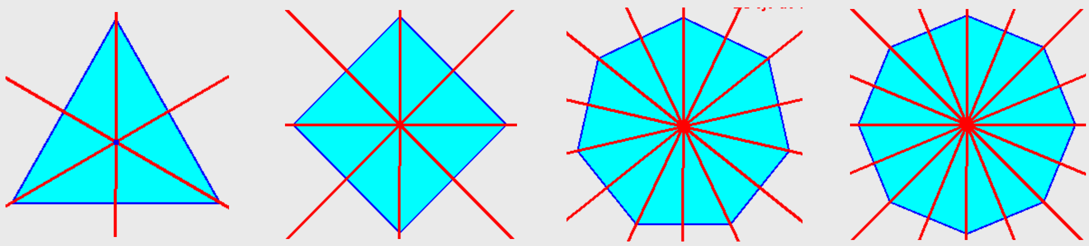


Ángulo central: 360:5=72º
Ángulo interior: 180-72=108º
Ángulo exterior: 180-108=72º



Ángulo central: 360:6=60º
Ángulo interior: 180-60=120º
Ángulo exterior: 180-120=60º

12. Dibuja los ejes de simetría en un triángulo equilátero, un cuadrado, un heptágono regular y un octógono regular:

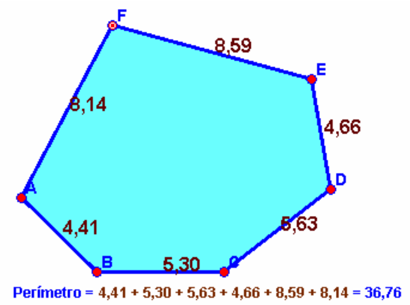


5. Perímetros y áreas

Definición. Medir áreas.

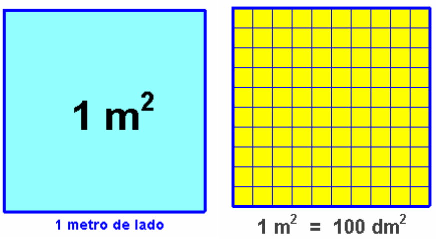
El **perímetro** de una figura plana es la **suma de las longitudes de sus lados**.

El **área** de una figura corresponde a la **medida de la superficie que dicha figura ocupa**. El cálculo del área se realiza de forma **indirecta**, es decir, hay que recurrir a diferentes fórmulas matemáticas para conocerla, no podemos medirla como hacemos con las longitudes (con regla podemos "leer" directamente la longitud de un segmento).



Perímetro de un polígono

Sumando las longitudes de los lados de un polígono hallaremos su **perímetro**. El **área no puede medirse de forma directa**, hay que recurrir a fórmulas indirectas.



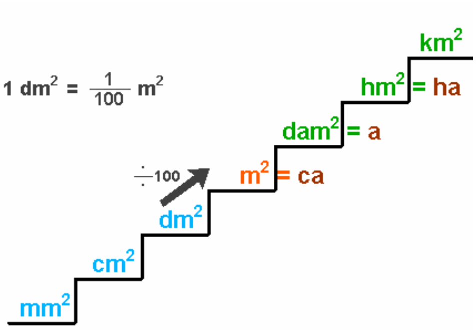
Unidad de superficie

Unidades de superficie

Para medir superficies se toma como unidad la superficie que corresponde a un cuadrado de un metro de lado. A esta unidad se le denomina **metro cuadrado** y se simboliza m^2.

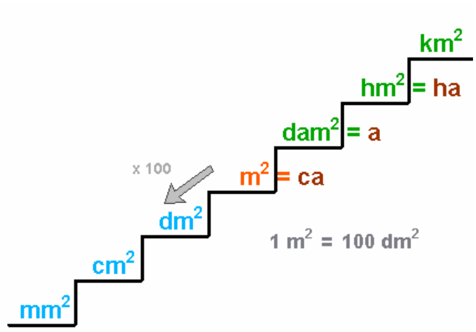
En el gráfico se puede ver que mientras que un metro es igual a diez decímetros, un metro cuadrado equivale a cien centímetros cuadrados. Las unidades de superficie varían de 100 en 100.

- Para pasar de una unidad a su inmediatamente posterior deberemos dividir por 100.
- Para pasar de una unidad a su inmediatamente anterior deberemos multiplicar por 100.



Paso a unidades superiores

La unidad de superficie es el **metro cuadrado (m^2)**.

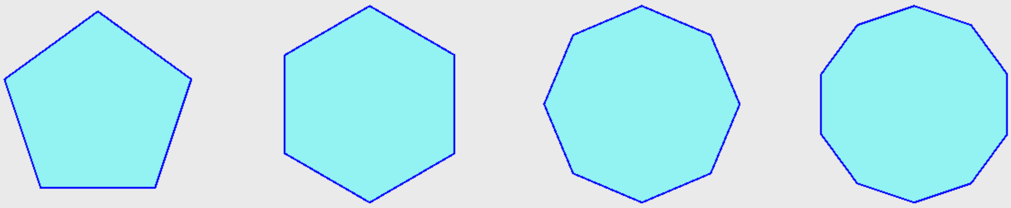


Paso a unidades inferiores

En la medida de la superficie de terrenos se suele utilizar como unidad el **área**, que equivale a un decámetro cuadrado o a cien metros cuadrados.

EJERCICIOS resueltos

13. Calcula el área de los siguientes polígonos regulares expresando el resultado en decámetros, metros, decímetros, centímetros y milímetros:



a) Perímetro del pentágono: 0.025 dam = 0.25 m = 2.5 dm = **25 cm** = 250 mm
b) Perímetro del hexágono: 4.8 dam = **48 m** = 480 dm = 4800 cm = 48000 mm
c) Perímetro del octógono: 0.16 dam = 1.6 m = **16 dm** = 160 cm = 1600 mm
d) Perímetro del decágono: 0.004 dam = 0.04 m = 0.4 dm = 4 cm = **40 mm**

14. ¿Cuántos cm^2 son 40 m^2?

Para pasar de m^2 a cm^2 hay que bajar dos posiciones. Hay que multiplicar dos veces por 100. Equivale a multiplicar por 10000.

$$40\ m^2 = 40 \cdot 100 \cdot 100 = 40 \cdot 10000 = 400000\ cm^2.$$

15. ¿Cuántos m^2 son 500 mm^2?

Para pasar de mm^2 a m^2 hay que subir tres posiciones. Hay que dividir tres veces por 100. Equivale a dividir por 1000000

$$500\ mm^2 = 500 : 100 : 100 : 100 = 500 : 1000000 = 0.0005\ m^2.$$

16. ¿Cuántos dm^2 son 7 km^2?

Para pasar de km^2 a dm^2 hay que bajar cuatro posiciones. Hay que multiplicar cuatro veces por 100. Equivale a multiplicar por 100000000.

$$7\ km^2 = 7 \cdot 100000000 = 700000000\ dm^2.$$

17. ¿Cuántos hm^2 son 24 dam^2?

Para pasar de dam^2 a hm^2 hay que subir una posición. Hay que dividir por 100.

$$24\ dam^2 = 24 : 100 = 0.24\ hm^2.$$

18. ¿Cuántos mm^2 son 0.125 hm^2?

Para pasar de hm^2 a mm^2 hay que bajar cinco posiciones. Hay que multiplicar cincos veces por 100. Equivale a multiplicar por 10000000000.

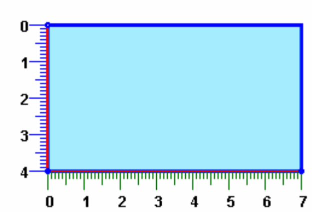
$$0.125\ hm^2 = 0.125 \cdot 10000000000 = 1250000000\ mm^2.$$

6. Áreas de polígonos

Áreas de cuadriláteros

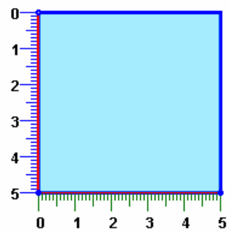
El cálculo del área de un cuadrilátero, en el caso de rectángulos, cuadrados y romboides, es muy sencilla.

> El cálculo del **área de un rectángulo** es básico para entender el cálculo de áreas de otras figuras planas.



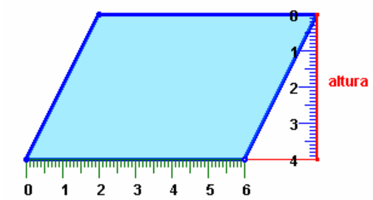
A = 7 x 4 = 28 cm^2

- **Área de un rectángulo**. Se obtiene multiplicando la base por la altura: A = base x altura.



A = 5 x 5 = 25 cm^2

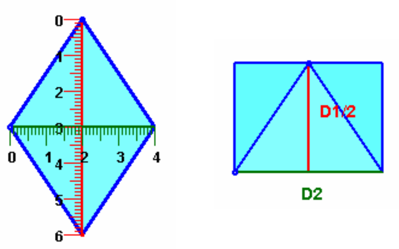
- **Área de un cuadrado**. A = lado x lado = lado^2.



A = 6 x 4 = 24 cm^2

- **Área de un romboide**. Se obtiene a partir del área del rectángulo, multiplicando la base por la altura del romboide (no por el oro lado).

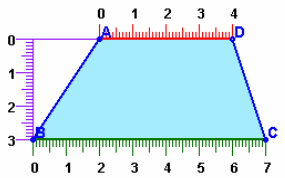
A = base x altura.

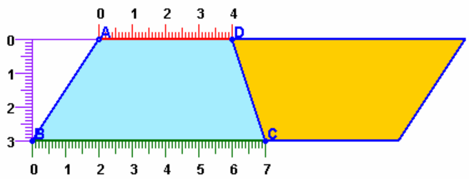


$$A = \frac{6 \times 4}{2} = 12\ cm^2$$

- **Área de un rombo**. A partir de un rombo se puede construir un rectángulo como se puede observar en el gráfico de la izquierda. La base coincide con una de las diagonales y la altura con la mitad de la otra:

$$A = \frac{\text{Diagonal mayor x diagonal menor}}{2}$$





$$A = \frac{(7+4) \times 3}{2} = 16{,}5\ cm^2$$

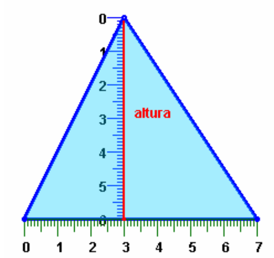
- **Área de un trapecio**. Si se coloca el mismo trapecio invertido como se muestra en la figura de la izquierda, se obtiene un romboide. El área de este romboide es el doble del área del trapecio. La base del romboide es la suma de las bases de los trapecios y la altura del romboide coincide con la altura del trapecio.

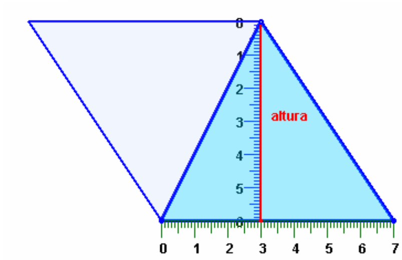
$$A = \frac{\text{(Base mayor + base menor) x altura}}{2}$$

Áreas de triángulos

Para entender cómo se calcula el área de un triángulo cualquiera, se coloca el triángulo invertido como se muestra en la figura de la derecha. Se obtiene un romboide de área doble del triángulo, la misma base y la misma altura.

El **área** de un triángulo es igual al producto de su base por su altura dividido entre dos.



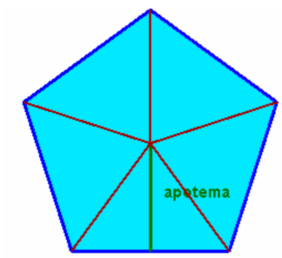


$$A = \frac{7 \times 6}{2} = 21\,cm^2$$

Áreas de polígonos regulares

Para calcular el área de un polígono regular cualquiera se divide en triángulos uniendo el centro con cada uno de los vértices. La altura de cada uno de los triángulos coincide con la apotema del polígono. Se calcula el área de uno de estos triángulos y se multiplica por el número de triángulos que se han formado.

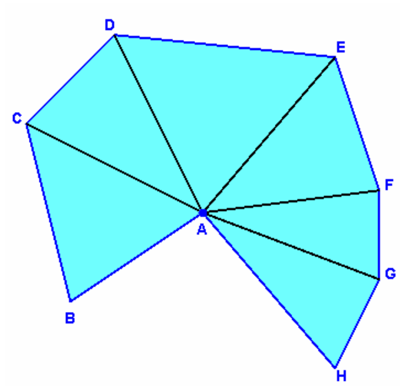
El **área** de un **polígono regular** es igual al producto de su **perímetro** por su **apotema** dividido entre dos.



$$A = n \times \frac{lado \times apotema}{2} = \frac{(n \times lado) \times apotema}{2}$$

Áreas de polígonos irregulares

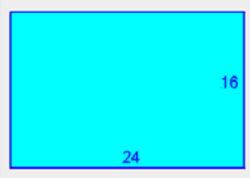
Para calcular el área de un polígono irregular cualquiera debemos basarnos en métodos indirectos. Estos métodos, básicamente, son tres: el llamado método de **triangulación**, el uso de una **trama cuadriculada** o, en algunos casos, **descomponer el polígono en cuadriláteros conocidos**.



Triangulación de un polígono irregular

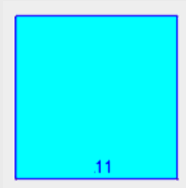
EJERCICIOS resueltos

19. Calcular el área de los siguientes paralelogramos:



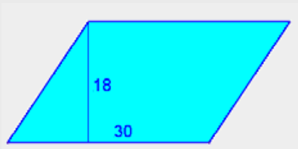
$A = 24 \times 16$

$A = 384\ cm^2$



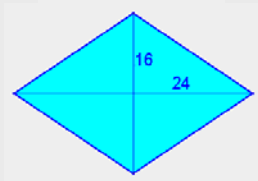
$A = 11^2$

$A = 121\ cm^2$



$A = 30 \times 18$

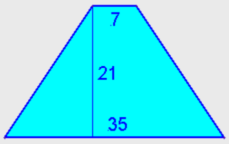
$A = 540\ cm^2$



$A = \frac{24 \times 16}{2}$

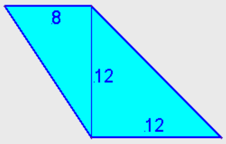
$A = 192\ cm^2$

20. Calcular el área de los siguientes cuadriláteros:



$A = \frac{(35+7) \times 21}{2}$

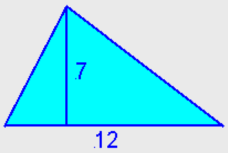
$A = 441\ cm^2$



$A = \frac{(12+8) \times 12}{2}$

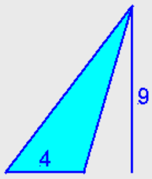
$A = 120\ cm^2$

21. Calcular el área de los siguientes triángulos:



$A = \frac{12 \times 7}{2}$

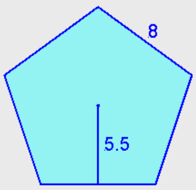
$A = 42\ cm^2$



$A = \frac{4 \times 9}{2}$

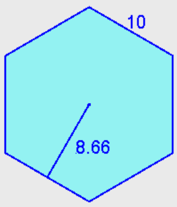
$A = 18\ cm^2$

22. Calcular el área de los siguientes polígonos regulares:



$A = \frac{5 \times 8 \times 5.5}{2}$

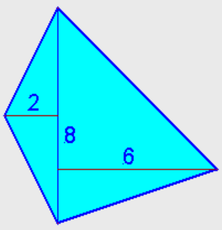
$A = 110\ cm^2$



$A = \frac{6 \times 10 \times 8.66}{2}$

$A = 259.8\ cm^2$

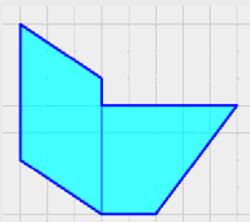
23. Calcular el área de los siguientes polígonos:



$A_1 = \frac{8 \times 2}{2} = 8\ cm^2$

$A_2 = \frac{8 \times 6}{2} = 24\ cm^2$

$A = 8 + 24 = 32\ cm^2$



$A = 5 \times 3 = 15\ cm^2$

$A = \frac{(5+2) \times 4}{2} = 14\ cm^2$

$A = 15 + 14 = 29\ cm^2$

Para practicar

1. Queremos enmarcar un cuadro cuyas dimensiones totales son 103 cm de base por 63 cm de alto. ¿Qué longitud deberá tener la moldura que debemos usar? Si la moldura cuesta a 7,2 euros el metro, calcula el precio de dicho marco.

2. En una ciudad hay un parque cuya forma es la de un pentágono irregular. Los lados miden respectivamente, 45, 39, 29, 17 y 39 metros. ¿Qué longitud tiene la valla que lo rodea?

3. En las fiestas de un pueblo han montado una carpa para las verbenas, cuya forma es la de un polígono regular de 11 lados. La carpa está rodeada por una guirnalda con bombillas que tiene una longitud total de 68 m. ¿Cuánto mide el lado de la carpa?

4. Se tiene que embaldosar el patio interior de un edificio con baldosas cuadradas de 30 cm de lado. El patio es rectangular y sus medidas son 10 m por 12 m. ¿Cuántas baldosas se necesitarán?

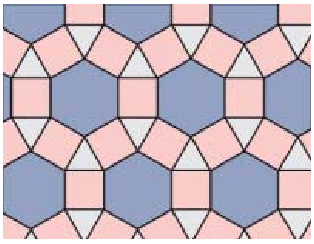
5. Una vela triangular de una barca se ha estropeado y hay que sustituirla por otra. Para confeccionar la nueva vela nos cobran 21 euros por m^2. ¿Cuánto costará esa nueva vela si debe tener 8 m de alto y 4 m de base?

6. Un rollo de tela de 2 m de ancho se ha usado para cortar 1050 pañuelos cuadrados de 20 cm de lado. ¿Qué longitud de tela había en el rollo si no ha faltado ni sobrado tela?

7. Hemos fabricado una cometa con forma de rombo, cuyas diagonales miden 393 cm y 205 cm respectivamente. Para ello se ha usado una lámina plástica rectangular cuya longitud y anchura son las de la cometa. Calcula el área de la cometa y la de la lámina.

8. Una empresa fabrica sombrillas para la playa. Para ello usa tela cortada en forma de polígono regular. Calcula la cantidad de tela que necesitará para fabricar 36 sombrillas de 10 lados si sabemos que el lado mide 173 cm y su apotema mide 266,21 cm.

9. Calcula el área de las coronas poligonales del mosaico representado (las formadas por cuadrados y triángulos que rodean a cada uno de los hexágonos). El lado del hexágono es igual al del dodecágono y mide 30 cm. La apotema del hexágono mide 25,98 cm. La apotema del dodecágono mide 55,98 cm.



10. La torre de una antigua fortificación es de planta hexagonal. Se ha medido el área de la planta inferior obteniéndose un resultado de 166,27 m^2. Si cada una de sus paredes mide 8 m de anchura, ¿cuánto mide la apotema de la planta de dicha torre?

11. a) ¿Cuántos dam^2 son 97 hm^2?

b) ¿Cuántos dm^2 son 172 dam^2?

c) ¿Cuántos cm^2 son 0.5 km^2?

d) ¿Cuántos dm^2 son 2 km^2?

e) ¿Cuántos mm^2 son 256 m^2?

12. a) ¿Cuántos m^2 son 250000 mm^2?

b) ¿Cuántos dam^2 son 6 m^2?

c) ¿Cuántos hm^2 son 1423 mm^2?

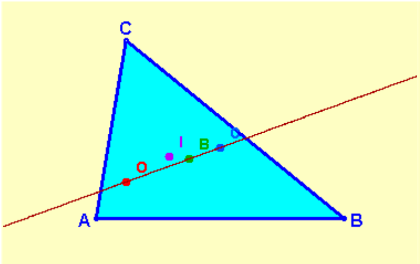
d) ¿Cuántos km^2 son 8000 dm^2?

e) ¿Cuántos m^2 son 1500000 cm^2?

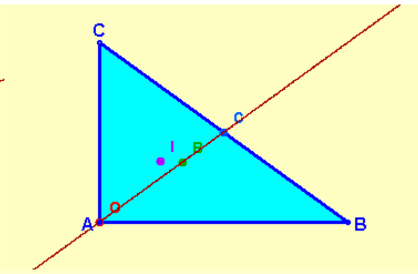
Para saber más

La recta de Euler

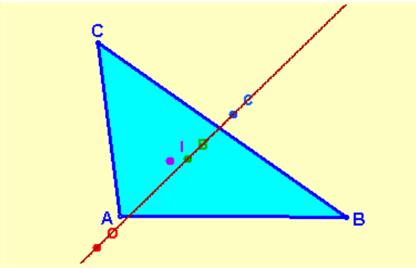
Si representamos los cuatro puntos notables de un triángulo, tres de ellos siempre están alineados (circuncentro, baricentro y ortocentro). La recta que pasa por los cuatro puntos se denomina recta de Euler.



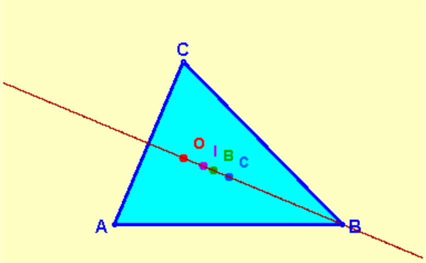
Recta de Euler un triángulo acutángulo.



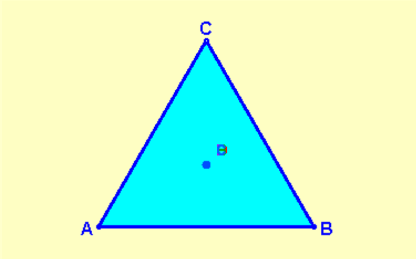
Recta de Euler un triángulo rectángulo.



Recta de Euler un triángulo obtusángulo.



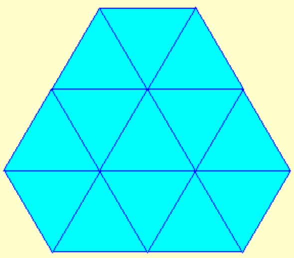
En un triángulo isósceles los cuatro puntos están alineados. El incentro está en la recta de Euler.



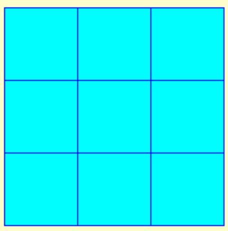
En un triángulo equilátero los cuatro puntos coinciden. No hay recta de Euler.

Cubriendo el plano

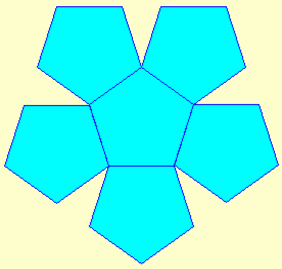
En el arte, el diseño textil y las matemáticas, resulta muy interesante poder saber qué polígonos recubren totalmente al plano, sin dejar espacios vacíos ni superponerse entre ellos. En la siguiente escena puedes probar con algunos de ellos. ¿Cuáles te permiten recubrir totalmente el plano?



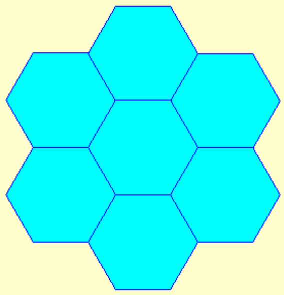
Con triángulos equiláteros es posible cubrir el plano



Con cuadrados es posible cubrir el plano



Con pentágonos regulares no es posible cubrir el plano

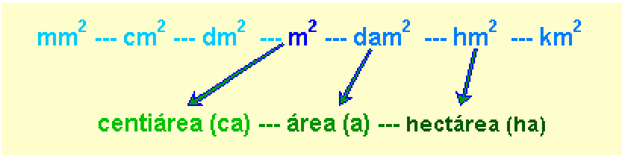


Con hexágonos regulares es posible cubrir el plano.

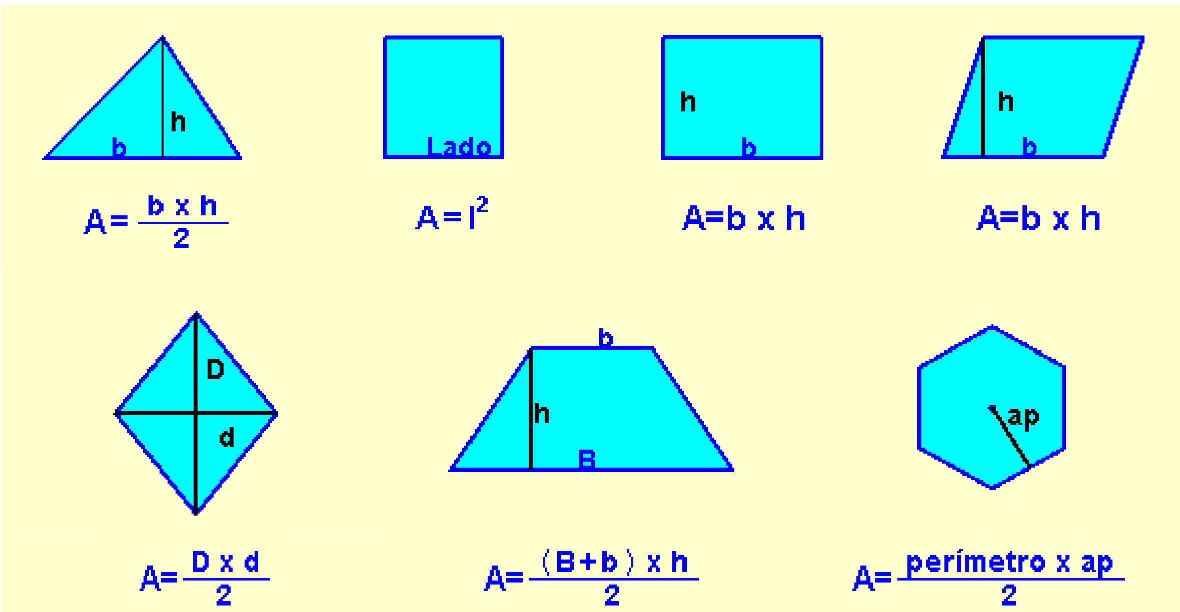
Con cualquier otro polígono regular no sería posible cubrir todo el plano, aunque sí sería posible, en algunos casos, utilizando polígonos distintos, por ejemplo, cuadrados y octógonos.

Recuerda lo más importante

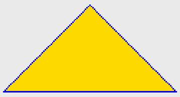
- Una **linea poligonal** es la que se obtiene al concatenar varios segmentos. Puede ser **abierta** o **cerrada.**
- Un **polígono** es la superficie interior de una línea poligonal cerrada. Pueden ser: **cóncavos** o **convexos** y **regulares** o **irregulares**.
- Los triángulos pueden clasificarse en: **acutángulos**, **rectángulos** y **obtusángulos**, según sus ángulos y en: **equiláteros**, **isósceles** y **escalenos**, según sus lados.
- Los **cuadriláteros** pueden ser: **paralelogramos**, **trapecios** y **trapezoides**, según tengan lados paralelos o no.
- Los paralelogramos se dividen en: **cuadrados**, **rectángulos**, **rombos y romboides.**
- La unidad de **área** es el **metro cuadrado** (**m²**). Las unidades de área **varían de 100 en 100**.
- Para medir terrenos agrarios se suelen usar las llamadas **unidades agrarias**: **área (a)**, **hectárea (Ha)** y **centiárea (ca)**, que equivalen, respectivamente al **dam²**, al **Hm²** y al **m²**.



- El **cálculo de áreas** de triángulos, cuadrilátero y polígonos regulares se realiza mediante la aplicación de diferentes **fórmulas**.
- En el caso de polígonos irregulares se usan técnicas como: la **triangulación**, **cuadriculación** y **descomposición.**

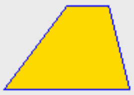


Autoevaluación

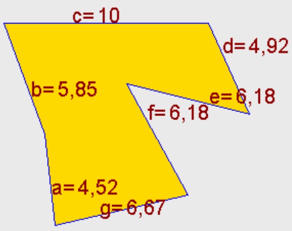


1. Clasifica el siguiente triángulo según sus lados.

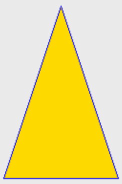
2. ¿Cómo se llama el punto en el que se cortan las medianas de un triángulo?



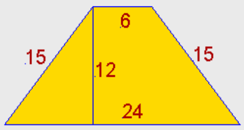
3. Clasifica el cuadrilátero.



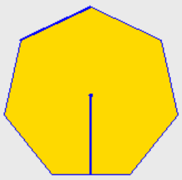
4. Calcula el perímetro del polígono.



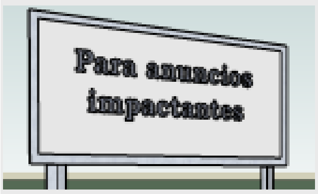
5. Calcula el área del triángulo sabiendo que la base mide 4 cm, los lados iguales miden 6,3 cm y la altura 6 cm.



6. Calcula el área del cuadrilátero.

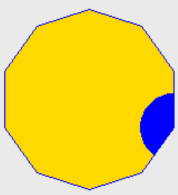


7. Calcula el área de un heptágono sabiendo que el lado mide 8 cm. y la apotema 8,30 cm.



8. Una valla publicitaria mide 9 metros de base y su área es de 27 m^2. ¿Cuál es su altura?

9. Halla la apotema de la tapadera de una bombonera con forma de hexágono regular, cuya área es de 314,86 cm^2 y su lado es de 11 cm.



10. Calcula la medida del ángulo interior de un decágono regular.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. 23,90 euros
2. 169 metros
3. 6,18 metros
4. 1333 baldosas
5. 336 euros
6. 21 metros
7. 4,03 metros, 8,06 metros
8. 23,03 metros cuadrados
9. 7738,2 centímetros cuadrados
10. 6,93 metros
11. a) 9700 dam^2
    b) 1720000 dm^2
    c) 5000000000 cm^2
    d) 200000000 dm^2
    e) 256000000 mm^2
12. a) 0,25 m^2
    b) 0,06 dam^2
    c) 0.0000001423 hm^2
    d) 0,0008 km^2
    e) 150 m^2

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. Isósceles
2. Baricentro
3. Trapecio
4. 44,32 cm^2
5. 12 cm^2
6. 180 cm^2
7. 232,4 cm^2
8. 3 metros
9. 4,77 cm
10. 144º

No olvides enviar las actividades al tutor ►

10 La circunferencia y el círculo

Objetivos

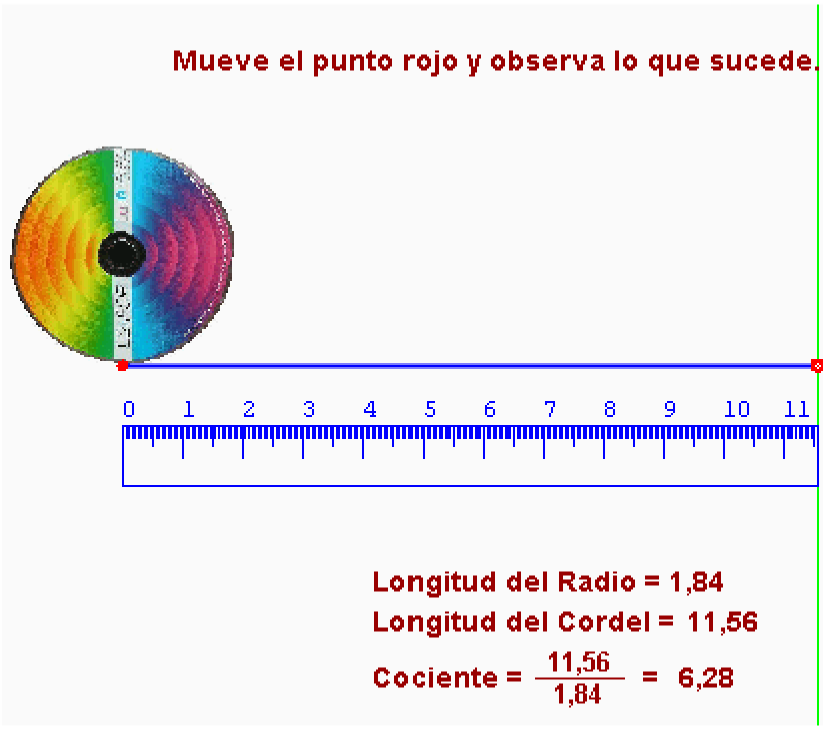
En esta quincena aprenderás a:

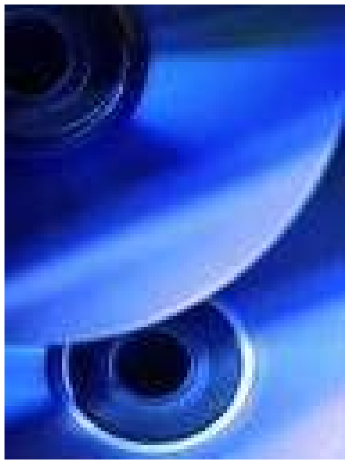
- Identificar los diferentes elementos presentes en la circunferencia y el círculo.
- Conocer las posiciones relativas de puntos, rectas y circunferencias.
- Conocer las propiedades de los ángulos construidos en la circunferencia.
- Medir longitudes y áreas de figuras circulares.

Antes de empezar

Investiga

Construye un círculo de cartón y mide la distancia del centro al borde. Enrolla un trozo de cordel alrededor del contorno del círculo. Desenróllalo después y mídelo también. Divide la segunda cantidad entre la primera y anota el resultado. Puedes repetir el experimento con círculos de distintos tamaños. ¿Qué puedes decir de los resultados que se obtienen?





El disco de la figura tiene un cordel enrollado a lo largo de su borde exterior. Al desenrrollar el cordel (en la figura aparece en azul), podremos medir su longitud. En este caso esta longitud es de 11,56 cm.

Al dividir la longitud del cordel entre el radio del círculo, que mide 1,84 cm, obtenemos como cociente 6,28.

No habría nada de particular en todo lo que acabamos de ver. Lo realmente sorprendente es que si repetimos el experimento con cualquier objeto redondo, obtendremos finalmente el mismo cociente ... ¡exactamente el mismo!

Este cociente debe ser, por tanto, una cantidad con entidad propia, es decir, una cantidad que tendrá una relación íntima y fundamental con la geometría del círculo.

1. La circunferencia

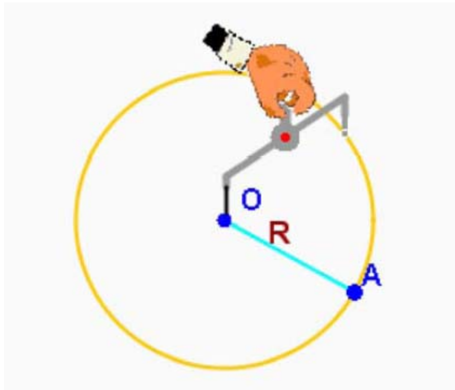
La circunferencia.

Marca un punto O sobre un plano. Marca ahora otro punto A cualquiera y calcula la distancia entre O y A. Si buscas todos los puntos del plano que están a esa misma distancia del punto O, obtendrás una figura plana, que se conoce como **circunferencia**.

De manera más precisa, la **circunferencia** es una línea plana y cerrada formada por todos los puntos se encuentran a igual distancia de un punto O dado.

El punto O se llama **centro** de la circunferencia y la distancia entre el centro y cualquiera de los puntos de la circunferencia se llama **radio**.

La **circunferencia** es una línea plana y cerrada en la que todos los puntos están a **igual distancia** de un punto O dado.



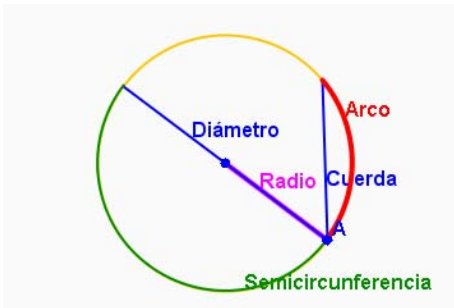
El compás es un instrumento necesario para el dibujo de circunferencias y círculos.

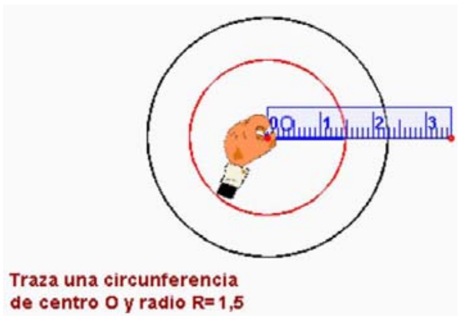
Para dibujar una circunferencia basta situar la aguja del compás sobre un punto y, con la abertura, deseada, girarlo. La abertura que hayamos dado al compás es el **radio** de la circunferencia.

Elementos de la circunferencia.

En una circunferencia podemos distinguir los siguientes elementos:

- **Centro**: es el punto situado en su interior que se encuentra a la misma distancia de cualquier punto de la circunferencia.
- **Radio**: es el segmento que une cualquier punto de la circunferencia con el centro.
- **Cuerda**: es el segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.
- **Diámetro**: es la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.
- **Arco**: es el segmento de circunferencia comprendido entre dos de sus puntos.
- **Semicircunferencia**: es el arco que abarca la mitad de la circunferencia.



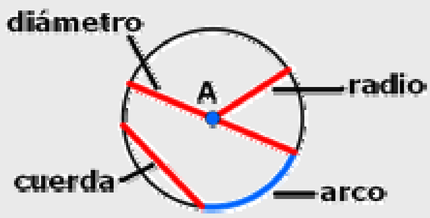


El diámetro tiene **longitud doble** que el radio.

EJERCICIOS resueltos

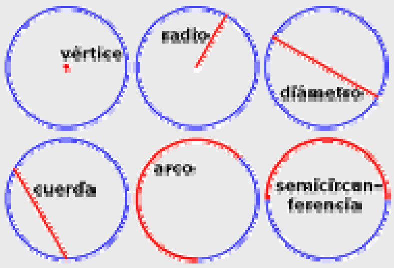
1. Dibuja con regla y compás una circunferencia de 3 cm de radio con centro en el punto A y traza sobre ella los siguientes elementos: un radio, un diámetro, una cuerda y un arco.

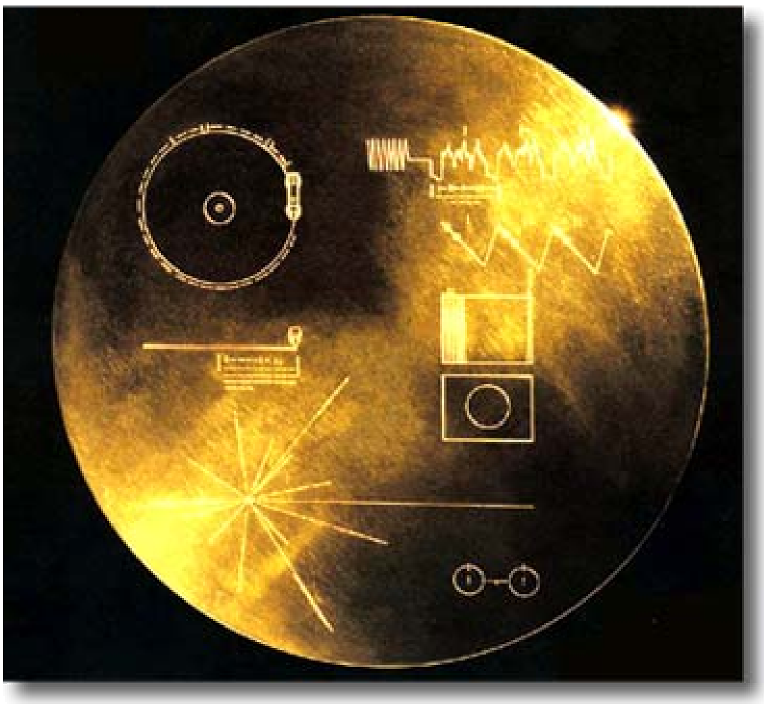
   Sol Usa los instrumentos de dibujo para obtener un resultado similar a este:



2. Identifica en la figura el nombre de los distintos elementos que aparecen coloreados en rojo.

   Sol





2. Posiciones relativas

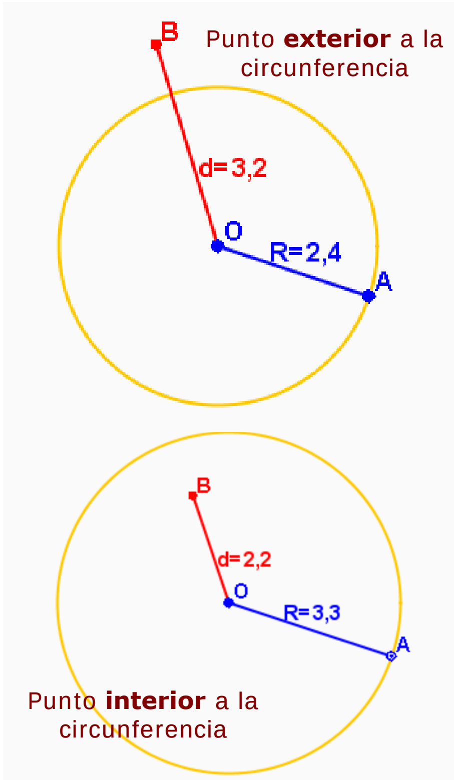
Punto y circunferencia.

Entre un punto y una circunferencia pueden producirse distintas situaciones a las que llamamos **posiciones relativas**.

Decimos que el punto es **exterior** a la circunferencia si se encuentra a una distancia del centro **mayor** que el radio. En este caso el punto está fuera de la circunferencia. El punto es **interior** si se encuentra a una distancia del centro **menor** que el radio. El punto está entonces dentro de la circunferencia.

Si el punto esta situado sobre la circunferencia decimos que **pertenece** a ella. En este caso la distancia al centro es **igual** al radio.

> Un punto que no pertenezca a la circunferencia puede ser **interior** o **exterior** a ella.



Recta y circunferencia.

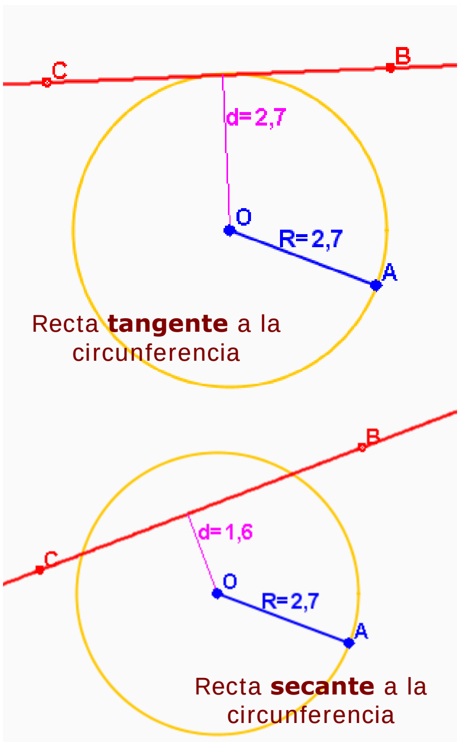
Igual que hemos hecho con puntos, podemos estudiar la posición relativa de una recta y una circunferencia. Se pueden dar los siguientes casos.

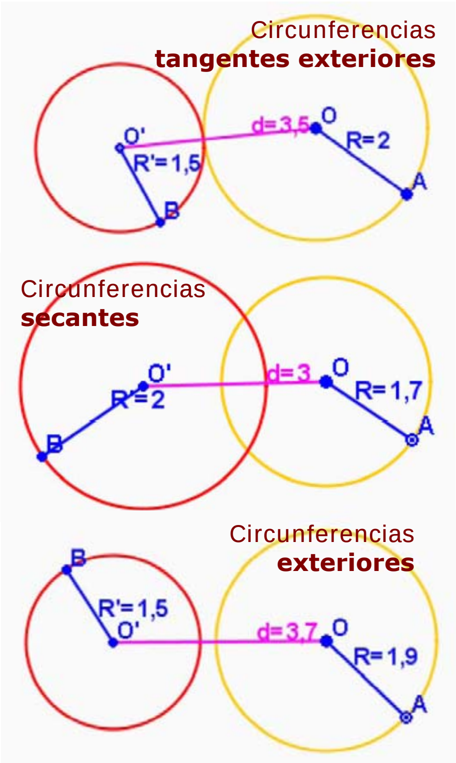
Si la recta no tiene **ningún punto en común** con la circunferencia, decimos que son **exteriores**.

Si tienen **un punto en común**, decimos que la recta y la circunferencia son **tangentes**. En este caso la recta es **perpendicular** al radio.

Si tienen **dos puntos comunes**, entonces decimos que la recta y la circunferencia son **secantes**.

> Llamamos **tangente** a la recta que tiene un sólo punto en común con la circunferencia.





Dos circunferencias.

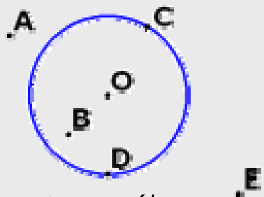
Entre dos circunferencias se pueden producir las siguientes posiciones relativas.

- **Exteriores**: todos los puntos de cada circunferencia son exteriores a la otra.
- **Interiores**: todos los puntos de una de las circunferencias son interiores a la otra. Si además tienen el mismo centro, decimos que son concéntricas.
- **Tangentes**: tienen un punto en común. Serán tangentes **exteriores** o tangentes **interiores**, dependiendo de la posición de los puntos que no son comunes a ambas.
- **Secantes**: tienen dos puntos en común y cada circunferencia divide a la otra en dos arcos.

EJERCICIOS resueltos

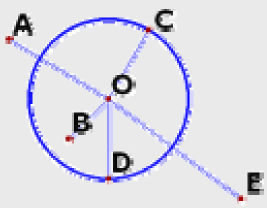
3. Indica si los siguientes puntos son interiores, exteriores o pertenecen a la circunferencia.

Sol A y E son exteriores; O y B son interiores; C y D pertenecen a la circunferencia.



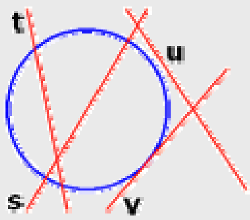
4. Indica cuáles de los puntos están a igual distancia del centro, cuáles se encuentran a una distancia del centro mayor que el radio, cuáles están a distancia menor que el radio y cuáles están a una distancia equivalente al doble del radio.

Sol Los puntos C y D están situados a igual distancia del centro O; A y E están situados a mayor distancia que el radio; B está situado a menor distancia que el radio; E está situado a una distancia doble del radio.



5. Indica la posición relativa de las rectas que aparecen en la figura, con respecto a la circunferencia.

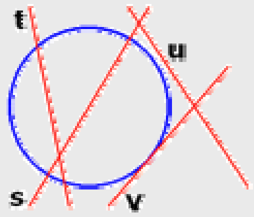
Sol Las rectas t y s son secantes; u es exterior a la circunferencia; v es tangente.



EJERCICIOS resueltos

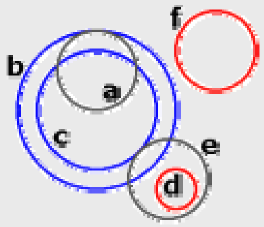
6. Representa sobre la figura la distancia de cada una de las rectas al centro de la circunferencia e indica en qué casos esa distancia es mayor que el radio, en qué casos es menor y en cuáles es igual que el radio.

Sol La distancia de la recta u al centro es mayor que el radio; la distancia de t al centro es menor que el radio; la distancia de v al centro es igual que el radio; la distancia de s al centro es nula.



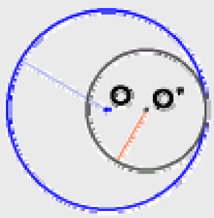
7. Indica la posición relativa de los pares de circunferencias que aparecen en la figura: a y b, a y c, b y c, c y f, e y d, e y b, a y d, c y e

Sol Las circunferencias a y b son tangentes interiores; a y c son secantes; b y c son interiores concéntricas; c y f son exteriores; e y d son interiores; e y b son secantes; a y d son de v al centro es igual que el radio; la distancia de s al centro es nula.



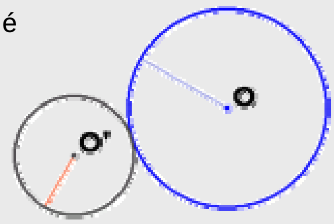
8. Dibuja dos circunferencias de radios 5 cm y 3 cm respectivamente que sean tangentes interiores. ¿A qué distancia se encuentran sus centros?

Sol La distancia entre los centros es de 2 cm.



9. Dibuja las mismas circunferencias anteriores, pero esta vez en posición de tangentes exteriores. ¿A qué distancia se encuentran ahora sus centros?

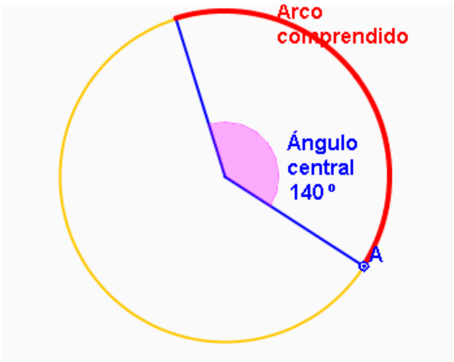
Sol Sus centros están a 8 cm de distancia.



10. Dos circunferencias tienen radios 3 y 4 cm respectivamente, y sus centros se encuentran a una distancia de 9 cm. ¿Cuál es su posición relativa?

Sol Son circunferencias exteriores.

3. Ángulos en la circunferencia



El ángulo central de la figura se corresponde con el arco de circunferencia dibujado en rojo.

Es posible establecer esta correspondencia entre cualquier ángulo central y su arco de circunferencia, o bien, en sentido contrario, entre cualquier arco y su ángulo central.

Por esta razón, podemos hablar de la **amplitud del arco**, que en este caso es de 140º.

Ángulo central.

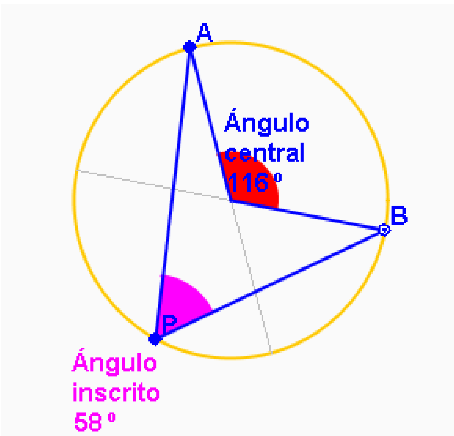
Se llama **ángulo central** a cualquier ángulo que tenga su **vértice** en el centro de la circunferencia.

Todo ángulo central corta a la circunferencia en dos puntos que determinan un arco comprendido.

Así, un ángulo de 360º comprende a la circunferencia completa, un ángulo de 180º divide a la circunferencia en dos arcos iguales y un ángulo recto comprende un arco que es la mitad de una semicircunferencia.

De esta manera es posible identificar cada **ángulo central** con su **arco** de circunferencia correspondiente.

Todo ángulo central determina un **arco** sobre la circunferencia.



El ángulo inscrito con vértice en el punto P es la mitad del ángulo central AOB.

De tal manera que si movemos el punto P a lo largo de la circunferencia, el ángulo APB tendrá siempre la misma amplitud, ya que seguirá siendo en todos los casos la mitad del ángulo central.

Ángulo inscrito.

Se llama **ángulo inscrito** al ángulo que tiene su vértice P en la circunferencia, de forma que sus lados son **secantes** con la circunferencia.

Si A y B son los puntos en que los lados del ángulo inscrito APB cortan a la circunferencia y consideramos el ángulo central AOB que queda determinado por los puntos A y B, resulta entonces que este ángulo central AOB tiene amplitud doble que el ángulo inscrito APB.

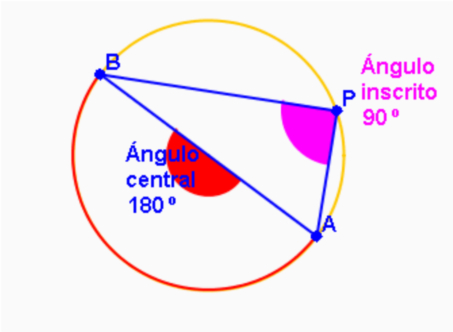
Sabemos así que la amplitud de cualquier ángulo **inscrito** es la **mitad** de la amplitud del ángulo **central** correspondiente.

La amplitud de cualquier ángulo inscrito es la **mitad** de la amplitud del ángulo central correspondiente..

Ángulo inscrito en la semicircunferencia.

Como consecuencia de la relación existente entre las amplitudes de los ángulos centrales y sus correspondientes ángulos inscritos, es resulta fácil obtener la amplitud de un **ángulo inscrito en una semicircunferencia**.

Un diámetro de la circunferencia determina una semicircunferencia, que se corresponde con un ángulo central de 180º (llano). Así, cualquier ángulo inscrito determinado por el diámetro tendrá una amplitud que es la mitad del ángulo llano. Por lo tanto, todo **ángulo inscrito** en una **semicircunferencia** es un ángulo **recto**.

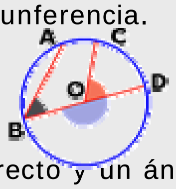


A un ángulo central corresponde un ángulo inscrito que es la mitad. Por este motivo, si el ángulo central es llano, el inscrito será recto.

EJERCICIOS resueltos

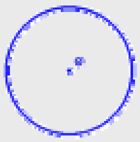
11. Identifica los siguientes tipos de ángulos, por su posición en la circunferencia.

Sol El ángulo ABD es un ángulo inscrito en la circunferencia; los ángulos COD y BOD son ángulos centrales.



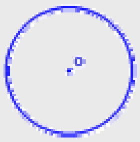
12. Representa sobre la circunferencia de la figura un ángulo central recto y un ángulo inscrito que se corresponda con él. Calcula la amplitud del ángulo inscrito, sin medirlo con el transportador.

Sol El ángulo inscrito es la mitad que su correspondiente angulo central. Como el ángulo central es recto, el inscrito será de 45º.



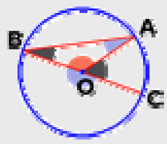
13. Representa sobre la circunferencia de la figura un ángulo inscrito recto y su correspondiente ángulo central. Calcula la amplitud del ángulo central, sin medirlo con el transportador.

Sol El ángulo central tiene amplitud doble que su correspondiente angulo inscrito, por lo que su amplitud será un ángulo llano.



14. En la siguiente figura indica la amplitud de los ángulos señalados, sin utilizar el transportador, sabiendo que el ángulo AOC mide 54º.

Sol El ángulo ABC es el inscrito correspondiente con AOC, así que su amplitud será 27º; AOB mide 136º por ser el suplementario de AOC; BAO mide 27º porque el triángulo ABO es isósceles; BOC es un ángulo llano.



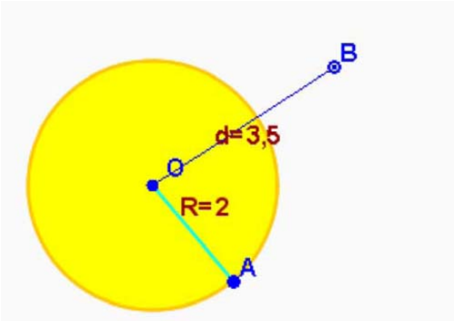
15. Si partimos una empanada en 18 trozos iguales, ¿qué ángulo corresponde a cada ración? ¿En cuántos trozos habría que cortarla para que cada ración fuese de 30º?

Sol Para partirla en 18 trozos haremos $\frac{360^{\circ}}{18} = 20^{\circ}$ cada ración; si queremos que las raciones sean de 30º, tendremos $\frac{360^{\circ}}{30^{\circ}} = 12$ raciones.

4. Círculo y figuras circulares

El círculo.

Llamamos **círculo** a la región plana encerrada por una circunferencia. De forma más precisa, si O es el centro de la circunferencia, el círculo es la región del plano formada por todos los puntos cuya **distancia** al centro O es **menor o igual** que el **radio** de la circunferencia.

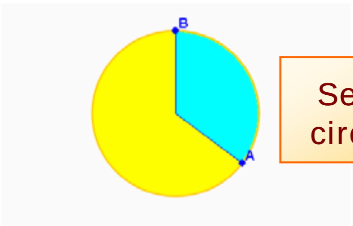


Si la distancia al centro es mayor que el radio, el punto será exterior al círculo.

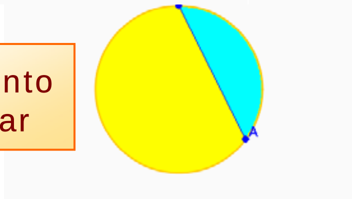
Así, el círculo comprende a todos los puntos de la circunferencia y también a todos los puntos interiores a ella. La circunferencia es por lo tanto el **contorno**, la "frontera" del círculo.

Se llaman centro, radio y diámetro del círculo al centro, radio y diámetro de su circunferencia.

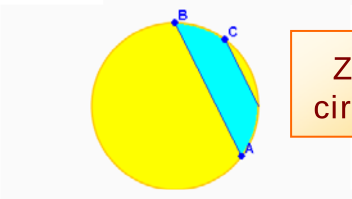
> El **círculo** está formado por la **circunferencia** y todos los puntos **interiores** a ella.



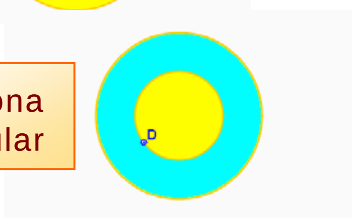
Sector circular



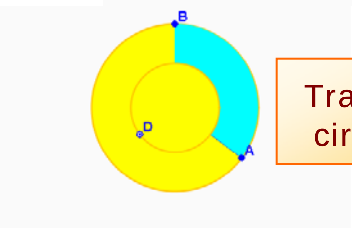
Segmento circular



Zona circular



Corona circular



Trapecio circular

Figuras circulares.

Es posible determinar en un círculo varias figuras geométricas de interés.

Se llama **sector circular** a la región del círculo determinada por dos radios.

Se llama **segmento circular** a la región del círculo determinada por una cuerda. La región delimitada por dos cuerdas paralelas se llama **zona circular**.

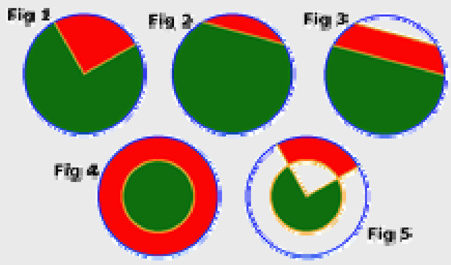
La región determinada por dos circunferencias concéntricas se denomina **corona circular**. Si cortamos una corona circular por dos radios, obtenemos una figura llamada **trapecio circular**.

> Los radios, cuerdas y circunferencias concéntricas determinan diversas **figuras circulares**.

EJERCICIOS resueltos

16. Identifica por su nombre los elementos que aparecen representados en rojo y verde en las figuras adjuntas.

Sol
- Fig 1 verde...... sector circular
  roja .... sector circular
- Fig 2 verde...... segmento circular
  roja .... segmento circular
- Fig 3 verde...... segmento circular
  roja .... zona circular
- Fig 4 verde...... círculo
  roja .... corona circular
- Fig 5 verde...... sector circular
  roja .... trapecio circular



Los sectores circulares, coronas, semicírculos y demás elementos están presentes en toda clase de objetos de distinta naturaleza.

Longitudes en la circunferencia.

En cualquier circunferencia, al dividir su longitud entre el diámetro, se obtiene una cantidad fija algo mayor que tres.
Esa **división** da siempre **3,1415926 ...**

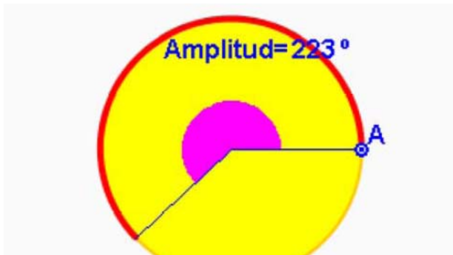
Este número se designa por la letra griega π (pi) y tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

Si L es la longitud de la circunferencia y D el diámetro, tenemos $L=\pi\cdot D$. Como el diámetro es doble del radio R, la longitud de la circunferencia será:

$$\mathbf{L=2\cdot\pi\cdot R}$$

Para hallar la longitud del arco de circunferencia, hacemos corresponder el perímetro $2\cdot\pi\cdot R$ con la amplitud 360º. Y por **proporcionalidad directa**, si n es la amplitud del arco, resulta

$$L_{arco}=\frac{n\cdot 2\cdot\pi\cdot R}{360}$$



EJEMPLO

Para calcular la longitud L_{arco} del arco de 223º expresamos la siguiente proporción:

$$\begin{matrix} L_{arco} & \rightarrow & 223^o \\ L_{circunf} & \rightarrow & 360^o \end{matrix} \quad \text{así que} \quad \frac{L_{arco}}{L_{circunf}}=\frac{223^o}{360^o}$$

y de aquí obtenemos que la longitud del arco es $L_{arco}=\frac{223^o}{360^o}\cdot L_{circunf}$

Como la longitud de la circunferencia es $L_{circunf}=2\cdot\pi\cdot 2{,}58$, ya podemos conocer la longitud del arco que buscábamos.

EJERCICIOS resueltos

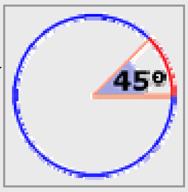
17. Calcula la longitud de una circunferencia que tiene 20 cm de radio.

Sol La longitud es $L = 2 \cdot \pi \cdot 20 = 125{,}66$ cm.

18. Calcula la longitud de dos circunferencia que tienen 30 cm de diámetro, la primera, y 15 cm de radio la segunda.

Sol El radio de la primera es la mitad del diámetro, es decir, 15 cm. Por tanto ambas tienen el mismo radio y su longitud es $L = 2 \cdot \pi \cdot 15 = 94{,}25$ cm.

19. Calcula la longitud de la circunferencia y de los arcos marcados en azul y rojo, sabiendo que su radio es 3 cm.



Sol La circunferencia tienen una longitud de $L = 2 \cdot \pi \cdot 3 = 18{,}85$ cm. El ángulo de 45º es la octava parte de la circunferencia, así que el arco rojo tiene longitud $L_{\text{arco rojo}} = \frac{18{,}85}{8} = 2{,}36$ cm. El arco azul es la diferencia entre la circunferencia y el arco rojo: $L_{\text{arco azul}} = 18{,}85 - 2{,}36 = 16{,}49$ cm.

20. Calcula la longitud del arco correspondiente a un ángulo de 180º en una circunferencia de radio 1. Calcula también las longitudes de los arcos de 30º, 90º y 270º.

Sol La circunferencia de radio 1 tienen longitud $L = 2 \cdot \pi \cdot 1 = 2 \cdot \pi$ y el arco de 180º es una semicircunferencia, así que su longitud será la mitad: $L_{\text{semicirc}} = \pi = 3{,}14$. Los arcos de 30º, 90º y 270º son la duodécima, cuarta y tres cuartas partes de la circunferencia, respectivamente, así que sus longitudes son: $L_{\text{arco } 30^{\circ}} = \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot \pi = 0{,}52$, $L_{\text{arco } 90^{\circ}} = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \pi = 1{,}57$, $L_{\text{arco } 270^{\circ}} = \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot \pi = 4{,}71$.

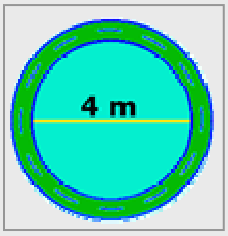
21. Calcula el radio de una circunferencia sabiendo que tiene una longitud de 25,13 cm.

Sol El radio será $R = \frac{25{,}13}{2 \cdot \pi} = 4$ cm.

22. Calcula el radio de una circunferencia sabiendo que a un ángulo de 60º le corresponde un arco de 10 cm. ¿Y si fuese un ángulo de 203º al que corresponde un arco de 15 cm?

Sol El ángulo de 60º es la sexta parte de la circunferencia, así que la longitud de la circunferencia completa es 60 cm y su radio será $R = \frac{60}{2 \cdot \pi} = 9{,}55$ cm. Para el arco de 203º, tenemos que $L_{\text{arco}} = \frac{n}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R$, de donde $15 = \frac{203}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R$ y de aquí $R = \frac{360 \cdot 15}{2 \cdot \pi \cdot 203} = 4{,}23$ cm.

23. Una piscina circular de 4 m de diámetro está rodeada por una acera de 1 m de anchura. ¿Cuál será la longitud de la acera si la medimos exactamente por la mitad de su anchura?



Sol Como la anchura de la acera es de 1 m, justo por la mitad tendremos una circunferencia de radio $2 + 0{,}5 = 2{,}5$ m. La longitud entonces será $L = 2 \cdot \pi \cdot 2{,}5 = 15{,}71$ cm.

Áreas en el círculo.

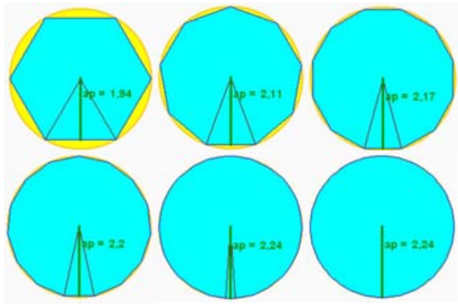
✓ El **área** de un **círculo** se puede hallar considerándolo como un polígono regular de "muchos" lados, en el cual el apotema coincide con el radio.

$$\text{Área de un polígono regular} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$$

$$\text{Que se convierte en } \frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot R}{2} = \pi \cdot R^2$$

Obtenemos así la fórmula que nos da el área a partir del radio.

$$\textbf{Área} = \pi \cdot R^2$$



✓ El **área** de un **sector circular** de amplitud n, se calcula utilizando la proporcionalidad directa, con lo que resulta la fórmula:

$$A_{sec\,tor} = \frac{n \cdot \pi \cdot R^2}{360}$$

EJEMPLO

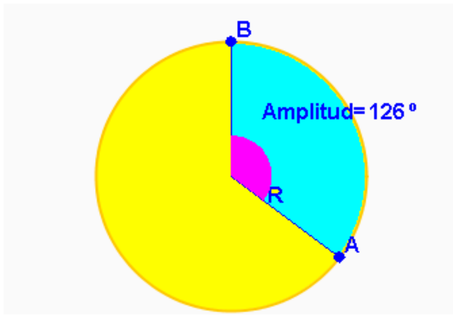
Para calcular el área A_{sector} del sector de 126º de un círculo de radio 2,5 cm, expresamos la siguiente proporción:

$$\begin{matrix} A_{sec\,tor} & \rightarrow & 126^\circ \\ A_{circ} & \rightarrow & 360^\circ \end{matrix} \quad \text{así que} \quad \frac{A_{sec\,tor}}{A_{circ}} = \frac{126^\circ}{360^\circ}$$

y de aquí obtenemos que el área del sector es

$$A_{sec\,tor} = \frac{126^\circ}{360^\circ} \cdot A_{circ}$$

Como el área del círculo es $A_{circ} = \pi \cdot 2{,}5^2$, ya podemos conocer el área del sector que buscábamos.



$$Area_{sec\,tor} = \frac{126 \cdot \pi \cdot 2{,}5^2}{360} = 27{,}74 \text{ cm}^2$$

✓ Para calcular el **área** de la **corona circular** se restan las áreas de las circunferencias mayor y menor:

$$A_{corona} = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

donde R y r son los radios mayor y menor de la corona.

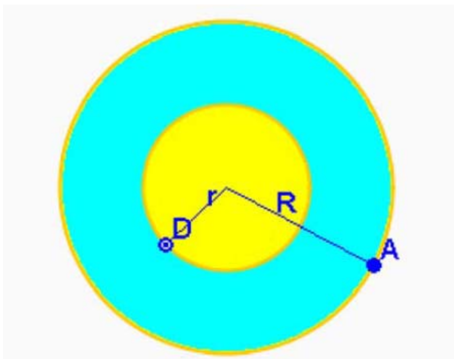
EJEMPLO

Para calcular el área A_{corona} de la corona circular de radio mayor 3,5 y radio menor 1,75 calcularemos el área de cada una de las dos circunferencias:

$$A_{mayor} = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 3{,}5^2 \;\; \text{y} \;\; A_{menor} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1{,}75^2$$

Restando ambas áreas obtenemos:

$$A_{corona} = \pi \cdot 3{,}5^2 - \pi \cdot 1{,}75^2 = \pi \cdot \left(3{,}5^2 - 1{,}75^2\right) = 28{,}86$$



$$A_{corona} = \pi \cdot \left(3{,}5^2 - 1{,}75^2\right) = 28{,}86 \text{ cm}^2$$

EJERCICIOS resueltos

24. Calcula el área de un círculo de 5 cm de radio.

Sol El área es $A = \pi \cdot 5^2 = 78{,}54 \ \text{cm}^2$.

25. Calcula el área de dos círculos de 10 cm y de 20 cm de diámetro, respectivamente.

Sol Las áreas son $A_1 = \pi \cdot 5^2 = 78{,}54$ y $A_2 = \pi \cdot 10^2 = 314{,}16 \ \text{cm}^2$. Es importante notar que si una circunferencia tiene radio doble que otra, su área no es el doble sino el cuádruple de la primera.

26. Calcula el área de las figuras circulares coloreadas.
Nota: El radio de las circunferencias exteriores es 2 cm en todos los casos y el de las interiores es 1,2 cm.

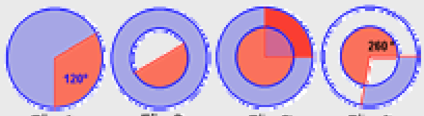


Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4

Sol

Fig 1 $A_{\text{sec tor rojo}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 = 4{,}19 \ \text{cm}^2$, $A_{\text{sec tor azul}} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 = 8{,}38 \ \text{cm}^2$;

Fig 2 $A_{\text{corona}} = \pi \cdot (2^2 - 1{,}2^2) = 8{,}04 \ \text{cm}^2$, $A_{\text{semicirc}} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1{,}2^2 = 2{,}26 \ \text{cm}^2$;

Fig 3 $A_{\text{trap rojo}} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (2^2 - 1{,}2^2) = 2{,}01 \ \text{cm}^2$, $A_{\text{trap azul}} = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot (2^2 - 1{,}2^2) = 6{,}03 \ \text{cm}^2$;

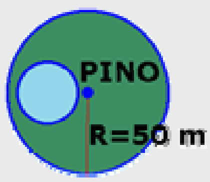
$A_{\text{sec tor rojo}} = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 1{,}2^2 = 3{,}39 \ \text{cm}^2$, $A_{\text{sec tor azul}} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1{,}2^2 = 1{,}13 \ \text{cm}^2$;

Fig 4 $A_{\text{sec tor rojo}} = \frac{260}{360} \cdot \pi \cdot 1{,}2^2 = 3{,}27 \ \text{cm}^2$, $A_{\text{trap azul}} = \frac{100}{360} \cdot \pi \cdot (2^2 - 1{,}2^2) = 2{,}23 \ \text{cm}^2$.

27. ¿Cuál es el perímetro de un círculo de área 25 cm^2?

Sol El radio es $R = \sqrt{\frac{25}{\pi}} = 2{,}82$ y el perímetro $L = 2 \cdot \pi \cdot 2{,}82 = 17{,}72 \ \text{cm}$.

28. Se quiere construir una piscina redonda en una finca circular de 50 m de radio, conservando un pino que hay en el centro. Calcula el diámetro máximo de la piscina y la superficie de finca que quedará después de la obra.



Sol El diámetro máximo de la piscina será de 50 m.
Superficie de la finca = $\pi 50^2 = 7850 \ \text{m}^2$
Superficie máxima de la piscina = $\pi 25^2 = 1962{,}5 \ \text{m}^2$, quedarán $5887{,}5 \ \text{m}^2$

29. El segundero de un reloj mide 2 cm. Calcula la longitud del arco que describe esta aguja al cabo de 20 segundos.

Sol Describe un arco de 120º, de longitud $L = 2 \cdot \pi \cdot 2 = 12{,}57 \ \text{cm}$.

30. Si el minutero de un reloj mide 4 cm, calcula el área del sector circular que describe esta aguja entre las 3:20 y las 4:00. Calcula el área del sector que describe en el mismo intervalo de tiempo la aguja horaria, que mide 3 cm.

Sol El minutero avanza 240º y barre un área de $A_{\text{minutero}} = \frac{240}{360} \pi \cdot 4^2 = 33{,}51 \ \text{cm}^2$.

La aguja horaria avanza 20º y el área es $A_{\text{horaria}} = \frac{20}{360} \pi \cdot 3^2 = 1{,}57 \ \text{cm}^2$.

Para practicar

1. En una circunferencia de radio 7,6 ¿cuál es la distancia entre el centro de la circunferencia y cualquiera de sus puntos? ¿Cuánto mide el diámetro de la circunferencia?

2. En una circunferencia de radio 4,6 ¿es posible trazar una cuerda de longitud 9,6?

3. Si una circunferencia tiene longitud 45 y un arco tiene longitud 25 ¿qué amplitud tendrá el ángulo central correspondiente a ese arco?

4. Si una recta se encuentra a distancia 2,8 del centro de una circunferencia de radio 8,8 ¿cuáles son sus posiciones relativas?

5. Si los centros de dos circunferencias están a una distancia de 9,9 y una de ellas tiene radio 2,1 ¿cómo deberá ser el radio de la otra para que sean exteriores?

6. Si el ángulo central de una circunferencia tiene una amplitud de 160º ¿cuál será la amplitud del ángulo inscrito correspondiente?

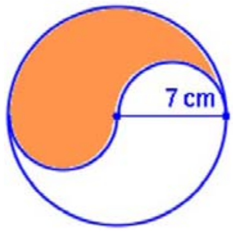
7. ¿Cuál será la amplitud del ángulo central si sabemos que su correspondiente ángulo inscrito tiene amplitud 27º? ¿Qué figura se forma cuando el ángulo inscrito es recto?

8. Calcula la longitud de una circunferencia de radio 3,4 y el área del círculo correspondiente. Calcula la longitud del arco de amplitud 241º y el área del sector correspondiente.

9. Calcula el radio interior de una corona circular sabiendo que su radio exterior es 7 y su área 125,6.

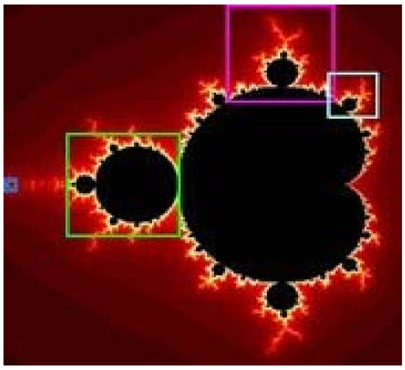
10. Calcula el área y el perímetro de una ventana formada por un rectángulo de 1,6 m de anchura y doble altura, coronada por un semicírculo.

11. Calcula el área y el perímetro de la figura naranja

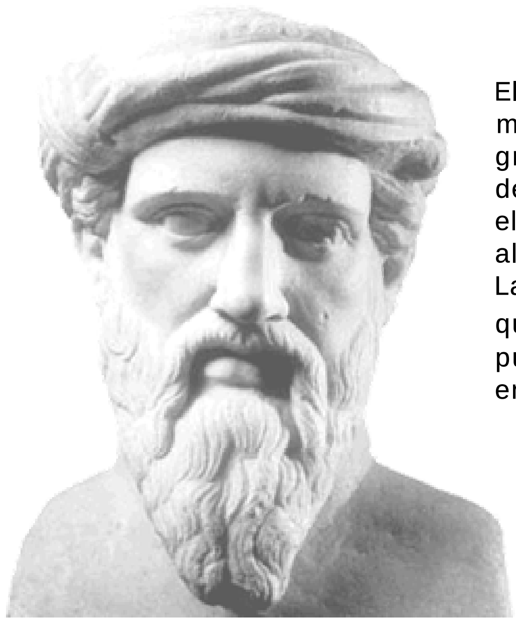


Para saber más

La importancia de un número.



El número π ha sido una de las primeras y más importantes empresas científicas de toda la historia. Desde los inicios de la geometría era conocida la relación que existe entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. El cociente entre ambas magnitudes es precisamente π, que toma su nombre de Pitágoras.



El problema estaba en obtener el valor exacto de este misterioso número y desde las épocas egipcia y griega se fueron dando distintas aproximaciones. Una de estas aproximaciones es la fracción 22/7 y tras ella fueron apareciendo otras, cada vez más cercanas al valor exacto. En 1768 el suizo Johann Heinrich Lambert demostró algo que se venía sospechando: que π no es un número racional, esto es, que no se puede obtener como el cociente de dos números enteros.

Pero el número quizá más famoso de la historia, es aún más especial: resultó ser que π no es tampoco un número algebraico. Esto quiere decir que no existe ninguna ecuación construída con las operaciones básicas de sumar, restar, multiplicar y elevar a una potencia, que tenga como solución el número π, como logró demostrar el alemán Lindemann en 1882. En la actualidad, sabido ya que π es un número compuesto por infinitas cifras decimales no periódicas, existen proyectos para determinar sus cifras, de las que ya se conocen varios millones. ¡Si tienes tiempo ... ya sabes!

Recuerda lo más importante

La circunferencia y sus elementos.

La **circunferencia** es una figura plana en la que todos sus puntos están a la **misma distancia** del **centro**. Sus elementos más importantes son:

- el **centro**
- el **radio**
- la **cuerda**
- el **diámetro**
- el **arco**
- la **semicircunferencia**

Distinguimos distintas **posiciones relativas** de puntos, rectas y circunferencias.

Existe una relación fundamental entre un **ángulo central** y su correspondiente **ángulo inscrito**: la amplitud del primero es **doble** de la del segundo.

Como consecuencia de lo anterior, todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

El círculo y sus elementos. Longitudes y áreas.

El **círculo** es la figura plana formada por una circunferencia y todos los **puntos interiores** a ella. Las figuras circulares son:

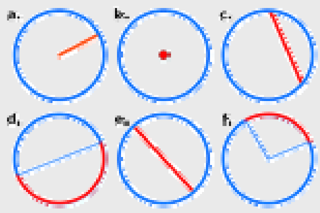
- el **sector** circular
- el **segmento** circular
- la **zona** circular
- la **corona** circular
- el **trapecio** circular

Si R es la longitud del **radio** podemos obtener el **perímetro** y el **área** del círculo:

- el perímetro es $L = 2 \cdot \pi \cdot R$
- el área es $A = \pi \cdot R^2$

Estas fórmulas y la **proporcionalidad directa** nos permiten conocer la **longitud** de **arcos** y las **áreas** de **sectores**, **coronas** y **trapecios** circulares.

Autoevaluación



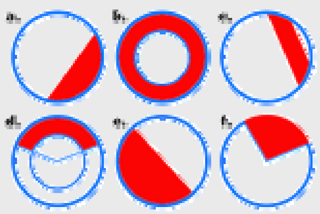
1. Relaciona el elemento de la circunferencia marcado en rojo con su nombre correspondiente.

2. Indica la posición relativa de un punto situado a distancia 9,2 del centro de una circunferencia de radio 6,8.

3. Indica la posición relativa de una recta situada a distancia 6,8 del centro de una circunferencia de radio 7,6.

4. Indica la posición relativa de dos circunferencias de radios 5,7 y 0,9 y cuyos centros están situados a una distancia de 4,8.

5. ¿Cuál es la amplitud del ángulo inscrito en una circunferencia sabiendo que su correspondiente ángulo central es de 224º?



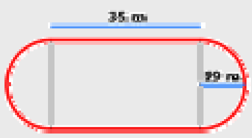
6. Identifica por su nombre las figuras circulares representadas en rojo.

7. Calcula la longitud del arco que abarca un ángulo de 145º en una circunferencia de radio 9,6.

8. ¿Cuál será el radio de una circunferencia sabiendo que el área del sector circular de amplitud 154º es de 71,6?

9. Calcula el área de un camino de 3 metros de anchura y que rodea a un jardín de forma circular de 7,9 metros de diámetro.

10. Calcula la distancia que recorre una velocista al dar 26 vueltas a un circuito como el de la figura.



Soluciones de los ejercicios para practicar

1. El radio: R= 7,6.
D=15,2.

2. No es posible trazar en una circunferencia cuerdas mayores que el diámetro, que en este caso es 9,2.

3. Como la longitud es directamente proporcional al ángulo resulta:
$\begin{matrix} \alpha & \to & 25 \\ 360^{\circ} & \to & 45 \end{matrix}$, así que el ángulo central será $\alpha = \frac{25}{45} \cdot 360^{\circ} = 200^{\circ}$

4. Al ser la distancia menor que el radio la recta y la circunferencia son secantes.

5. El radio de la otra deberá ser menor que la diferencia $9{,}9 - 2{,}1$: $R < 7{,}8$

6. El ángulo inscrito será la mitad de 160º, es decir 80º.

7. La amplitud del ángulo central es el doble de 27º, es decir, 54º. En el caso de que el ángulo inscrito sea recto, el central será llano y se forma un triángulo rectángulo.

8. La longitud es $L = 2 \cdot \pi \cdot 3{,}4 = 21{,}36$ y el área $A = \pi \cdot 3{,}4^2 = 36{,}32$. El arco tiene longitud $L_{arco} = \frac{241}{360} \cdot 21{,}36 = 14{,}30$
y el área del sector es
$A_{sector} = \frac{241}{360} \cdot 36{,}32 = 24{,}31$.

9. El área de la corona es la diferencia entre las áreas de los dos círculos y como el área del círculo exterior es 153,86, el área de la interior debe ser 28,26 y por lo tanto el radio interior es
$r = \sqrt{\frac{28{,}26}{\pi}} = 3$.

10. El rectángulo mide 1,6 de anchura y 3,2 de altura y el radio del semicírculo superior es 0,8. Con estos valores el perímetro es
$P = 1{,}6 + 2 \cdot 3{,}2 + \pi \cdot 0{,}8^2 = 10{,}51$ m y el área $A = 1{,}6 \cdot 3{,}2 + \frac{\pi \cdot 0{,}8^2}{2} = 6{,}12$ m^2.

11. El área es la mitad del área del círculo $\pi \cdot 7^2 = 153{,}86$ cm^2, la mitad 76,93 cm^2
El perímetro $\pi \cdot + 2\pi 3{,}5 = 43{,}96$ cm

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. a. radio, b. centro, c. cuerda,
d. semicircunferencia, e. diámetro, f. arco.

2. El punto es exterior a la circunferencia.

3. La recta y la circunferencia son secantes.

4. La circunferencia menor 0,9 es tangente interior a la circunferencia mayor.

5. $\frac{224^{\circ}}{2} = 112^{\circ}$

6. a. segmento, b. corona, c. zona,
d. trapecio, e. semicírculo, f. sector.

7. La longitud del arco es 24,29.

8. El radio es 7,30.

9. El área es 177,19 m^2.

10. La distancia recorrida es de 4 923,89 m.

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

NOTA IMPORTANTE: En la resolución de los ejercicios de esta quincena se ha utilizado el valor de π aproximado a dos cifras decimales, es decir, π≈3,14. Los cálculos y resultados se dan también redondeados a dos cifras decimales.

11

Tablas y gráficas

Objetivos

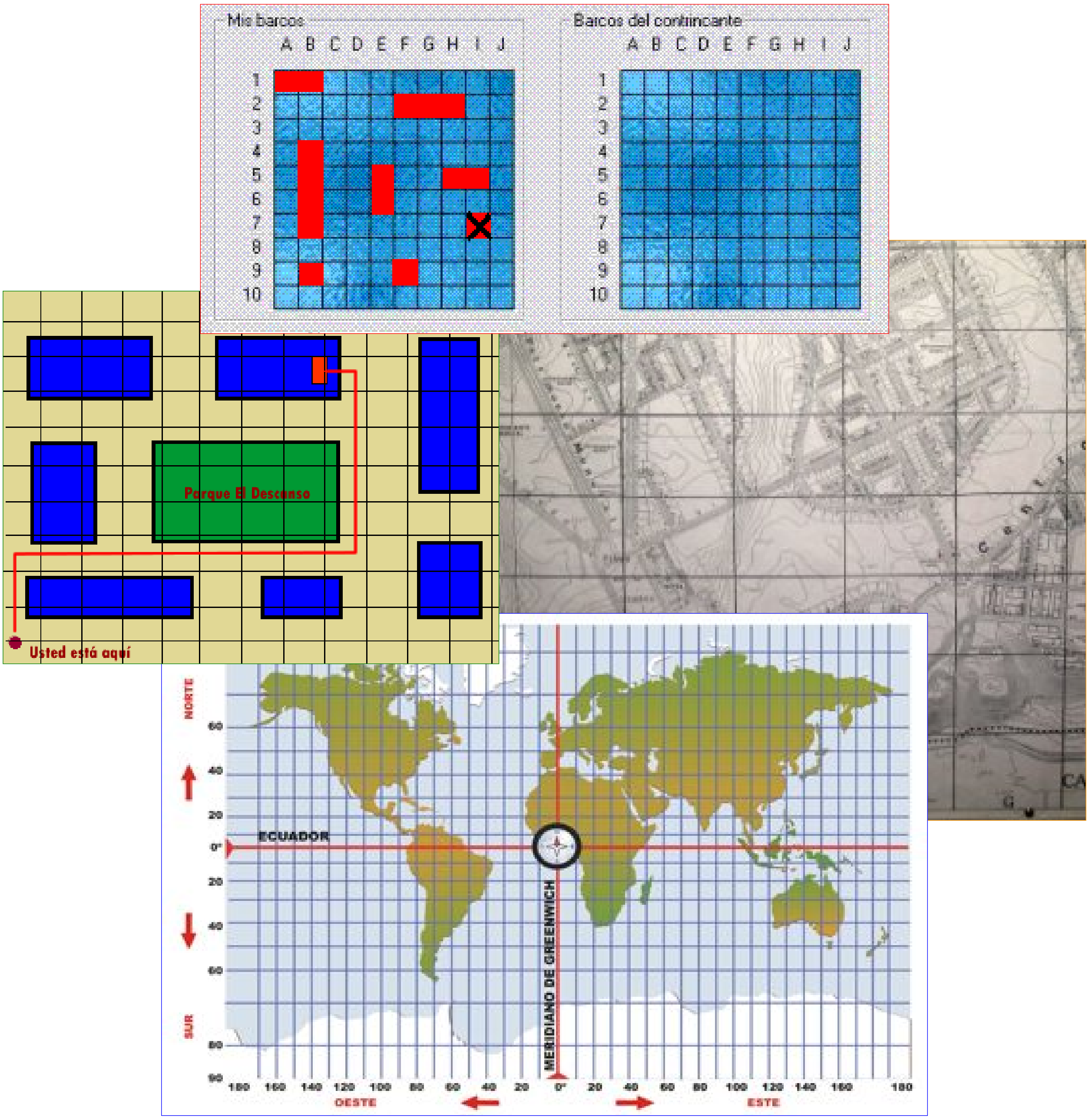
En esta quincena aprenderás a:

- Representar puntos en el plano
- Calcular las coordenadas de un punto
- Construir e interpretar gráficas cartesianas
- Construir e interpretar tablas de datos
- Reconocer magnitudes directamente proporcionales dadas por tablas o por representación gráfica

Antes de empezar

¿Qué tienen en común?

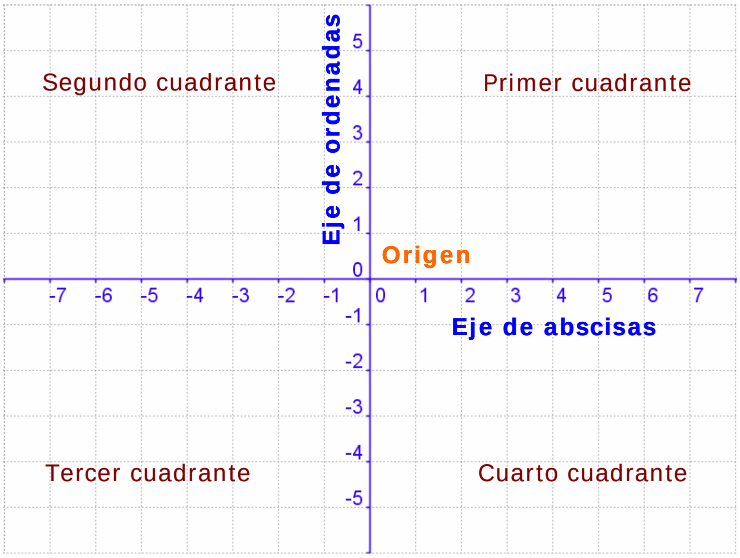
Observa las imágenes que aparecen en esta página. Intenta encontrar qué cosas pueden tener en común. ¡Ánimo!.



1. Sistema de ejes coordenados

Ejes cartesianos

Observa la siguiente imagen, en ella se muestran los elementos del sistema de **coordenadas cartesianas** que ha permitido avances en varios campos de las matemáticas.



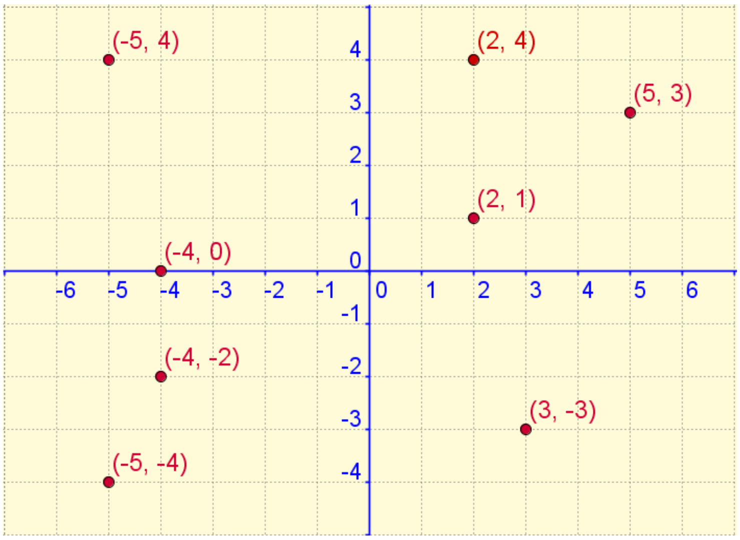
Un sistema de ejes coordenados (o cartesianos) está formado por dos ejes numéricos perpendiculares, uno horizontal, llamado de **abscisas** y otro vertical o de **ordenadas**.

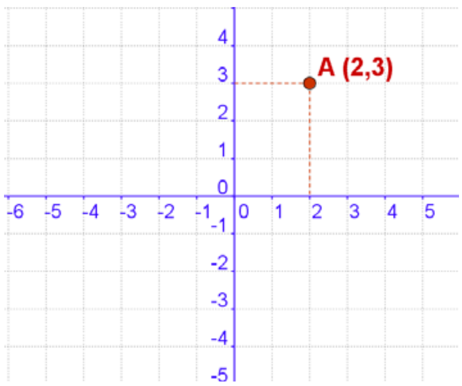
Ambos ejes se cortan en un punto llamado **origen** o **centro de coordenadas**.

Coordenadas de un punto

En la imagen de este apartado aparecen varios puntos en el plano y unos ejes cartesianos donde se visualizan las coordenadas cartesianas de cada punto.

Observa que las coordenadas de un punto son un **par ordenado** de valores.

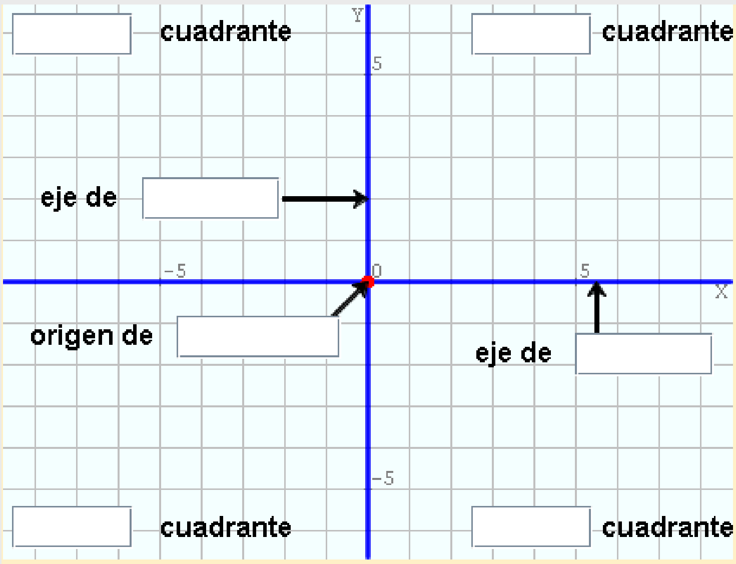




- La primera coordenada o **abscisa** de un punto nos indica la distancia a la que dicho punto se encuentra del eje vertical.
- La segunda coordenada u **ordenada** indica la distancia a la que se encuentra el punto del eje horizontal.

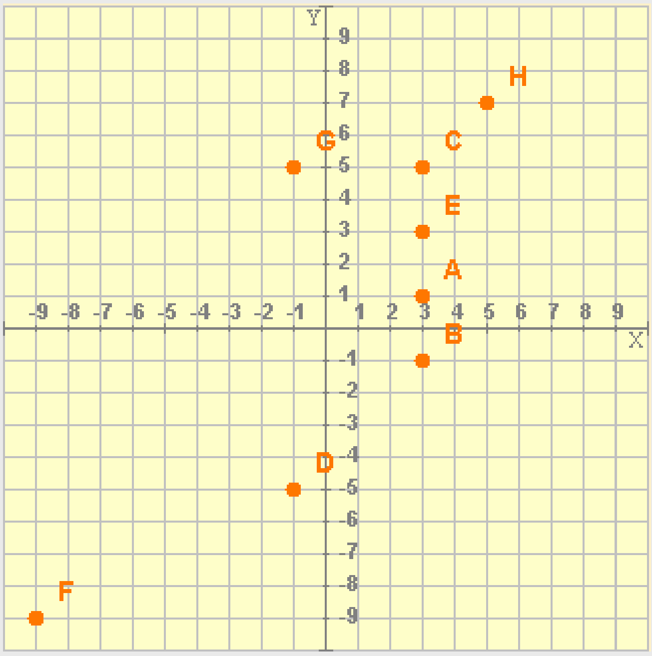
EJERCICIOS resueltos

1. Escribe los términos que correspondan en los rectángulos que se muestran en la siguiente imagen:



Los términos son (de arriba abajo y de izquierda a derecha): segundo, ordenadas, coordenadas, tercer, primer, abscisas, cuarto.

2. Completa la tabla con las coordenadas de los puntos representados en la imagen siguiente:



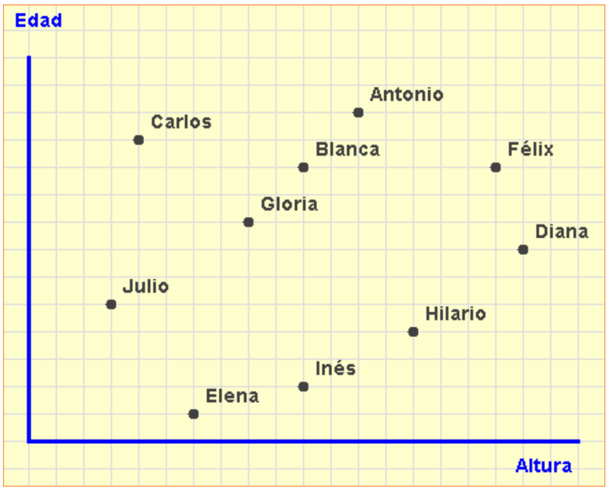
	x	y
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		
H		

Los puntos son: A(3,1) B(3,-1) C(3,5) D(-1,-5) E(3,3) F(-9,-9) G(-1,5) H(5,7)

2. Gráficas cartesianas

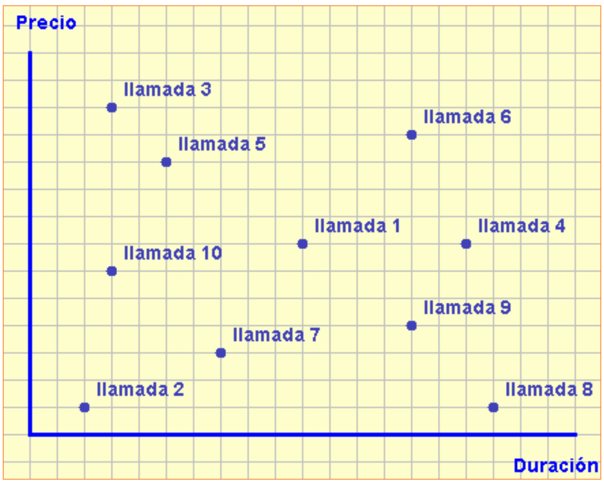
Interpretar gráficas de puntos

En la imagen de debajo se ve un ejemplo de **gráfica cartesiana.** Cada punto de la gráfica está relacionado con la **edad** y la **altura** de las personas que hacen cola para entrar en un cine.



Observa: el punto que aparece **más elevado,** el punto **más bajo,** el punto situado **más a la derecha** y el punto situado **más a la izquierda**. Relaciónalo con las magnitudes representadas.

En la segunda gráfica se muestran el **precio** y el **tiempo** que han durado las llamadas realizadas por diez personas que se encontraban en un Locutorio telefónico.



Observa: los puntos que están situados a la **misma altura,** y los puntos situados **sobre una misma vertical** Relaciónalo con las magnitudes representadas.

¿Cómo se interpreta?

- ✓ Diana es la más alta ya que el punto que la representa está más a la derecha. Antonio es el de mayor edad puesto que el punto que lo representa es el que se encuentra más arriba en la gráfica.
- ✓ Así mismo puedes ver que Blanca e Inés tienen la misma estatura ya que sus puntos están a la misma distancia del eje de ordenadas; y Blanca y Félix tienen la misma edad ya que sus puntos se encuentran a la misma distancia del eje de abscisas.
- ✓ El más bajito sería Julio y Elena es la más joven de todas las personas de la fila.

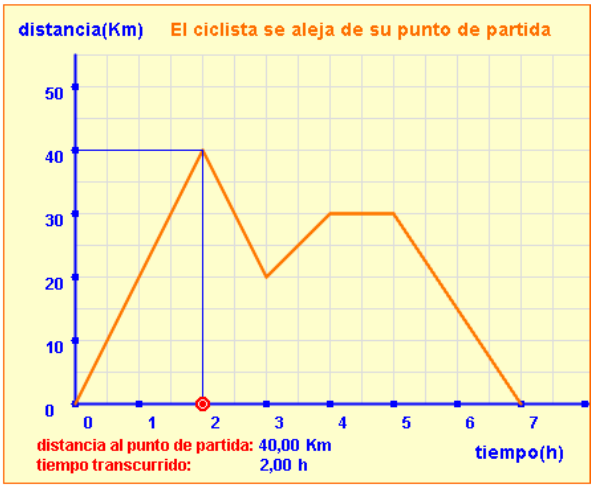
- ✓ La llamada de mayor duración ha sido la llamada 8.
- ✓ La llamada más cara ha sido la 3 aunque ha sido de las de menor duración.
- ✓ La llamada 2 ha sido la de menor duración y, junto con la 8, son las más baratas.
- ✓ Las llamadas 1 y 4 han costado lo mismo aunque su duración ha sido distinta.
- ✓ Las llamadas 6 y 9 han durado lo mismo pero la 6 es ha costado más.

- ✓ ¿Qué llamada crees que se ha hecho a un teléfono más cercano?

  La nº 8 ya que es la más larga y de menor coste.

Interpretar gráficas continuas

En la siguiente gráfica se describe el recorrido realizado por un ciclista y, a diferencia de las dos anteriores, no se trata de puntos aislados sino que es una línea continua:



La interpretación de la gráfica:

- ✓ El ciclista empieza su recorrido y a las dos horas se encuentra a 40 km.
- ✓ Recorre 20 km más pero volviendo hacia atrás.
- ✓ Vuelve a alejarse 10 km y se para a descansar durante una hora.
- ✓ Finalmente se vuelve a montar en su bicicleta y regresa al punto de partida tardando en esa última parte del recorrido, de 30 km, dos horas.

Observa: los tramos de la gráfica que indican que el ciclista se aleja, regresa o está parado.

EJERCICIOS resueltos

3. La empresa EDAD S.A. cotiza en Bolsa desde hace algunos años. En la gráfica adjunta se muestran las cotizaciones (en €) de sus acciones durante el año 2008. ¿Cuál ha sido la mayor cotización alcanzada por sus acciones? ¿En qué mes se consiguió? ¿Cuál ha sido el menor valor alcanzado por las acciones? ¿Cuál fue el mes en que se alcanzó esa mínima cotización? ¿Qué cotización se alcanzó en el mes de junio?:

La mayor cotización fue de 70 € y se alcanzó en diciembre. La menor cotización fue de 10 € y se alcanzó en agosto. En el mes de junio las acciones se cotizaron a 40 €

3. Tablas y gráficas

Tablas de valores

En muchas ocasiones tendremos **conjuntos de datos** que nos vengan dados de diferentes formas: expresión verbal, una fórmula o ecuación,... En cualquier caso el disponer de dichos datos en una **tabla** nos facilitará su interpretación y su representación gráfica.

Veamos los pasos a seguir para construir una **tabla de doble entrada** cuando los datos nos vienen dados de forma verbal o mediante una ecuación.

Primer ejemplo (datos en forma verbal):

En un club deportivo cuentan con 200 socios. De ellos 20 practican natación, 35 practican fútbol, 15 practican voleibol, 40 practican baloncesto, 30 practican atletismo, 10 practican tenis, 24 practican balonmano y 26 practican gimnasia.

Para este primer ejemplo prepararemos una tabla en sentido vertical, tal como la que aparece al lado (parte superior). Con los datos que tenemos la tabla debería tener **2 columnas** y **9 filas** (una fila será el encabezamiento de las dos columnas)

En las celdas de la primera fila escribimos el nombre de las magnitudes o de los tipos de datos que aparecerán en cada columna. En las demás celdas de la primera columna iremos escribiendo el nombre de los deportes que se practican. Aunque los escribiremos en el orden en que aparecen en el enunciado los podríamos escribir en orden alfabético o en cualquier otro orden que consideráramos.

A continuación rellenaríamos las celdas de la segunda columna con el número de practicantes de cada deporte. Ese número deberá corresponder con el deporte que haya escrito en la celda contigua de la primera columna. Al final deberemos tener una tabla similar a la que aparece al lado.

Observa: El orden de colocación de los valores relacionados y las posibles disposiciones de las tablas.

deporte	nº socios

deporte	nº socios
natación	
fútbol	
voleibol	
baloncesto	
atletismo	
tenis	
balonmano	
gimnasia	

deporte	nº socios
natación	20
fútbol	35
voleibol	15
baloncesto	40
atletismo	30
tenis	10
balonmano	24
gimnasia	26

Segundo ejemplo (datos en forma de ecuación):

El importe que debemos pagar por una determinada cantidad de botellines de zumo de naranja es:

Importe = 0,75 · nº de botellines

Observa: El cálculo de los importes se realiza de la siguiente forma (haremos el cálculo para conocer el importe de 5 botellines de zumo):

Importe=0,75 · nº botelllines =0,75 · 5 = 3,75 €.

Vamos a construir una tabla en la que se mostrarán los importes si se compran de 1 a 10 botellines. En este caso, en lugar de una tabla en sentido vertical construiremos una tabla en sentido horizontal y que, según los datos que tenemos deberá tener dos filas y once columnas ya que necesitaremos una columna para indicar a qué se refieren las cantidades que aparezcan en las celdas de cada fila.

Esta tabla puede ser como la siguiente:

Nº botellines										
Importe										

En las celdas de la primera fila escribiremos el número de botellines en orden creciente:

Nº botellines	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Importe										

En las celdas de la segunda fila escribiremos los importes correspondientes al número de botellines y que calcularemos a partir de la ecuación que nos dan en el enunciado:

Nº botellines	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Importe	0,75	1,5	2,25	3	3,75	4,5	5,25	6	6,75	7,5

De la tabla a la gráfica

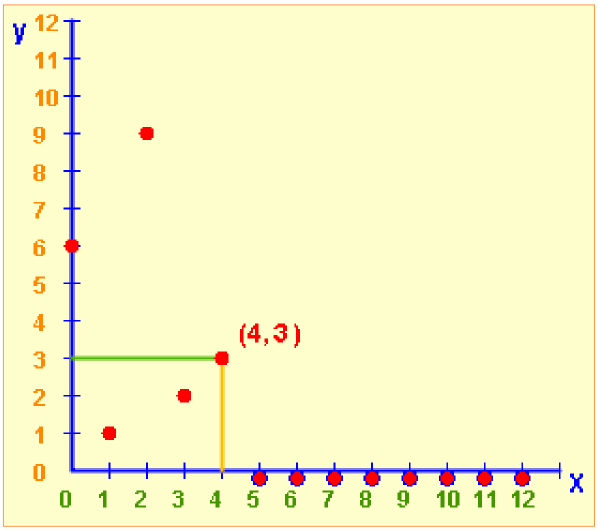
En muchas ocasiones necesitaremos que los datos recogidos en una tabla sean representados gráficamente sobre unos ejes de coordenadas.

Veamos cómo representar gráficamente los datos de la tabla que ves al lado. Primero deberemos dibujar una sistema de ejes coordenados sobre el que, posteriormente, representaremos los datos.

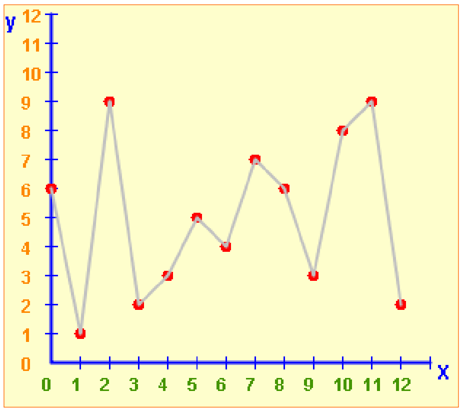
TABLA DE VALORES

X	Y
0	6
1	1
2	9
3	2
4	3
5	5
6	4
7	7
8	6
9	3
10	8
11	9
12	2

Una vez que hemos dibujado los ejes y marcados los valores correspondientes tanto en el eje de abscisas como en el eje de coordenadas, es cuando comenzaremos a situar los puntos que representarán los datos dados



Observa: Nos situamos en el primer punto de **X** dado en la tabla y subimos una altura igual a su correspondiente valor de **Y**, así obtenemos el primer punto de la gráfica.**(0,6)** Repetimos el proceso con cada pareja de valores de la tabla.
En la imagen de al lado se ven los trazos usados para representar el punto (4,3).



Una vez acabado el proceso deberemos obtener una gráfica similar a la que se muestra, en la que se han unido, mediante segmentos, cada par de puntos consecutivos, aunque no siempre se deberán unir

De la tabla a la gráfica

Veamos ahora el proceso inverso: nos dan una gráfica cartesiana y debemos construir la tabla de datos representada en dicha gráfica.

Fíjate en la gráfica del margen. A partir de las coordenadas de los puntos representados podremos construir la correspondiente tabla de datos. El proceso es idéntico al empleado en el segundo ejercicio del primer apartado de esta quincena.

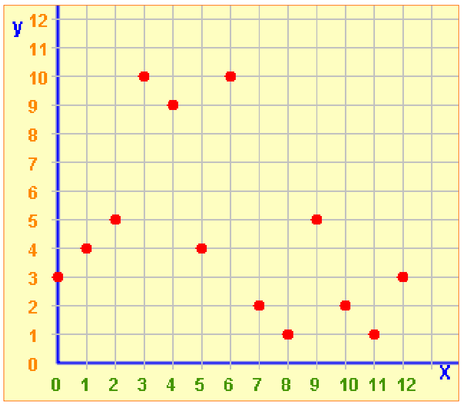
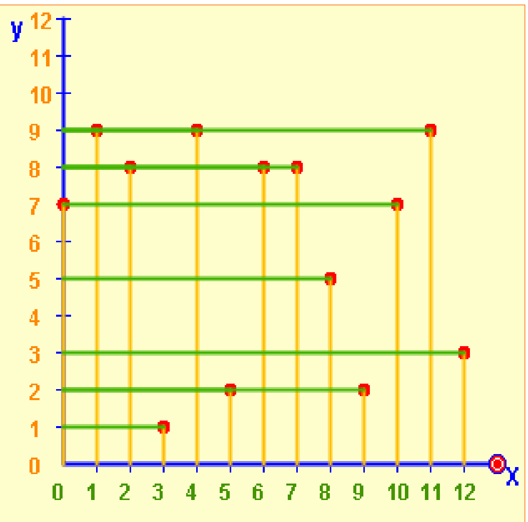


TABLA DE VALORES

X	Y
0	7
1	9
2	8
3	1
4	9
5	2
6	8
7	8
8	5
9	2
10	7
11	9
12	3



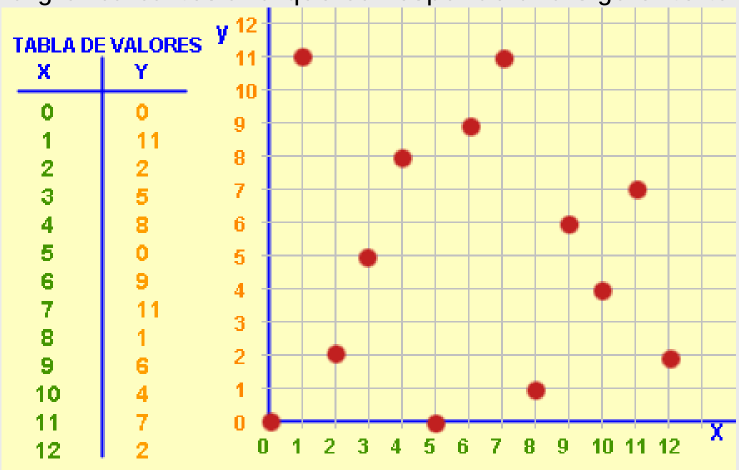
Proceso: por el primer punto de la gráfica (**el de más a la izquierda**), trazamos una paralela al **eje Y** hasta llegar al **eje X** y una paralela al **eje X** hasta el **eje Y**.
Estas paralelas, al cortar con cada uno de los ejes, nos darán los correspondientes **valores X e Y (coordenadas)** de ese punto. Anotamos los valores leídos en la **tabla de valores** y continuamos el proceso con los demás, hasta llegar al último punto (**el situado más hacia la derecha**).

EJERCICIOS resueltos

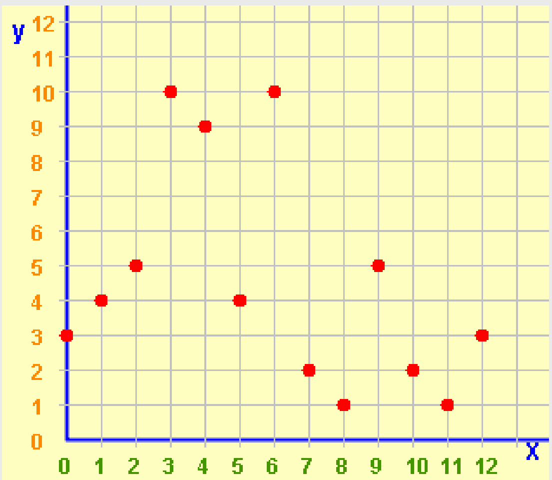
4. Sabiendo que el precio de un trayecto en taxi se calcula mediante la ecuación **precio (en €) = 0,55·distancia (en km)+1,5,** construye una tabla para recorridos de: 1, 2, 3, 5, 8, 12 y 15 km

Distancia (km)	1	2	3	5	8	10	12
Precio (€)	2,05	2,60	3,15	4,25	5,90	7,00	8,10

5. Construye la gráfica cartesiana que corresponde a la siguiente tabla de valores:



6. Construye la tabla de datos que corresponde a la gráfica cartesiana de puntos siguiente:



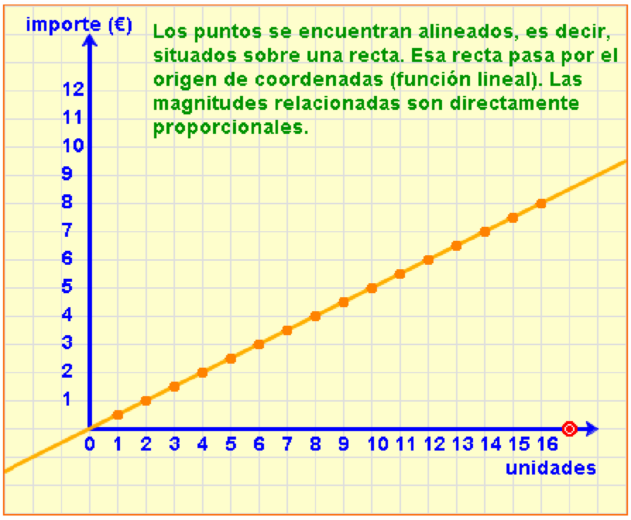
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	3	4	5	10	9	10	2	1	5	2	1	3

4. Más ejemplos de gráficas

De proporcionalidad directa

Un pastelito cuesta 0,5€, ¿cuánto costarán 2 pastelillos?, ¿y cuatro pastelillos?.

Es fácil ver que el **importe** a pagar será **y=0,5x**, donde **y** sería el importe en euros y **x** correspondería al número de pasteles comprados. Las magnitudes **importe** y **cantidad de panecillos** son **directamente proporcionales** con constante de proporcionalidad **0,5**.



x	y
0	0
1	0,5
2	1
3	1,5
5	2,5
10	5

Observa: los puntos están alineados sobre una recta que pasa por el origen de coordenadas. Es un ejemplo de **función lineal**.

Ampliemos un poco la información dada hasta ahora. Es fácil comprobar que **a cada cantidad de panecillos le corresponde un único importe**, es decir entre ambas magnitudes (cantidad de panecillos e importe) se establece una **correspondencia** en la que **a cada valor de la primera magnitud se le asocia uno y solo un valor de la segunda**.

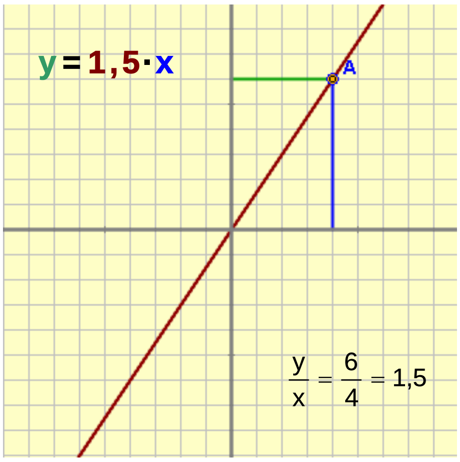
Cuando tenemos un tipo así de correspondencia decimos que las dos magnitudes están relacionadas mediante una **función,** o que tenemos definida una función. Una función puede venir descrita por: una expresión verbal, una tabla, una gráfica o una ecuación.

El ejemplo de los panecillos nos determina un tipo especial de función llamado **función lineal** (tal como ya hemos dicho al principio de este apartado) y todas se corresponden con ecuaciones del tipo

$$y = m \cdot x$$

donde **m** corresponde a la **constante de proporcionalidad**

En la gráfica de debajo se muestra la representación gráfica de una función lineal de ecuación **y=1,5·x** y se observa que las coordenadas del punto **A** representado verifican la relación **y/x=1,5**



Observa: el cociente entre la coordenada **Y** y la coordenada **X** de un punto de la gráfica de una **función lineal** nos determina **m**, que corresponde a la **constante de proporcionalidad**

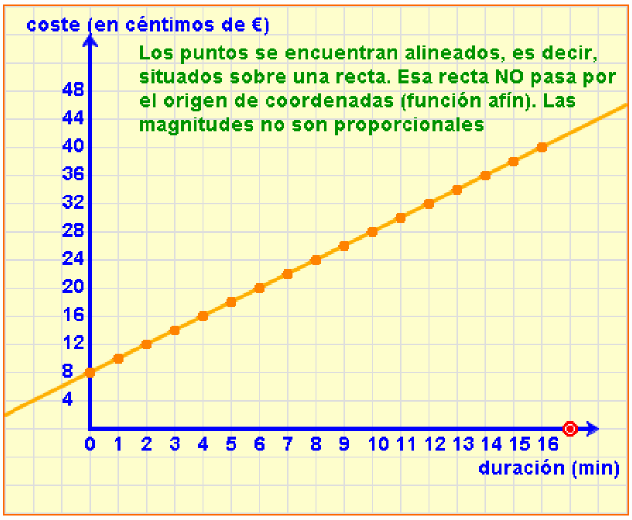
x min	y cent
0	8
1	11
2	14
3	17
5	23
10	38

Observa: los puntos están alineados sobre una recta que **NO** pasa por el origen de coordenadas.
Es un ejemplo de **función afín**.

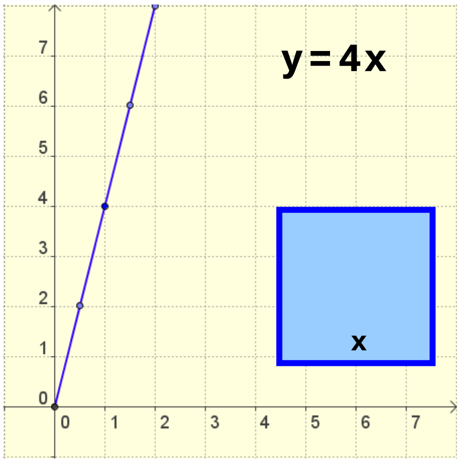
Otros ejemplos

1) Una compañía de telefonía fija cobra 8 céntimos de euro por establecimiento de llamada y 3 céntimos por minuto hablado. Podemos ver que la ecuación que nos determinará el coste de una llamada será **y=3x+8** donde **y** será el **coste** de la llamada en **céntimos** de euro y **x** será la **duración** de la llamada en **minutos**.

En la gráfica se muestra la representación gráfica de la ecuación.

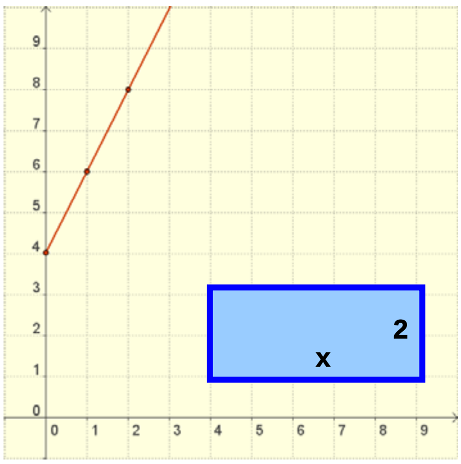


En ese caso se puede comprobar fácilmente que las dos magnitudes **no** son directamente proporcionales.



2) El perímetro de un cuadrado es **función** de su lado, a un cuadrado de lado 0,5 dm le corresponde un perímetro de 4·0,5=2 dm, un cuadrado de 2 dm de lado tiene un perímetro de 2·4 = 8 dm.

En general podemos escribir que el perímetro de un cuadrado de lado x es **y=4x**. Si se representa esta función se obtiene la gráfica de la izquierda. Es una función lineal.

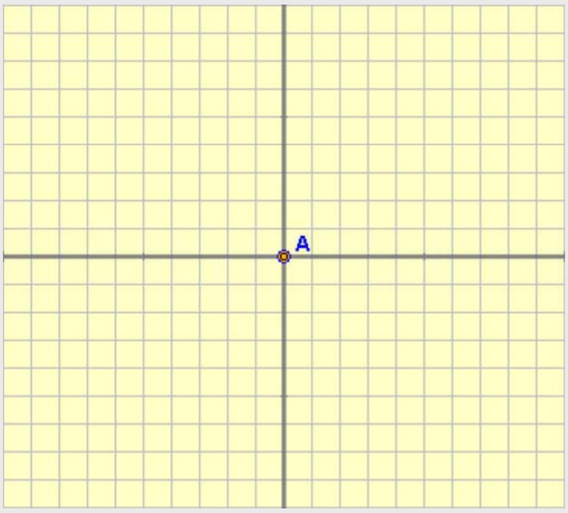


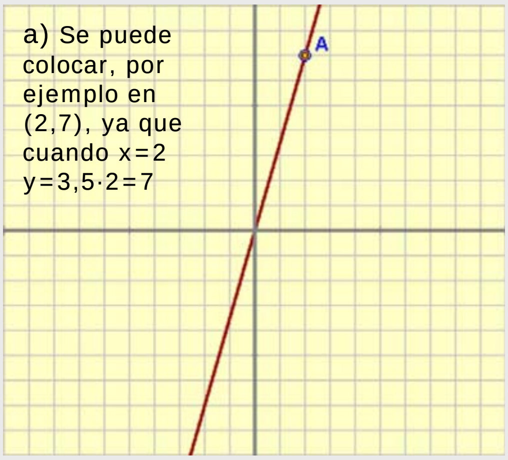
3) El perímetro de un rectángulo de altura 2 dm, también es función de la base. Si se llama x a la medida de la base el perímetro es **y=2x+4**. Representando esta función se obtiene la gráfica de la derecha, una recta que no pasa por el origen de coordenadas, es una función afín.

EJERCICIOS resueltos

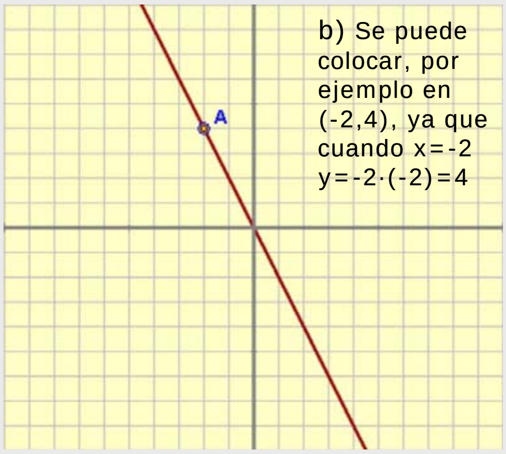
7. Sitúa el punto A de manera que la recta que pasa por dicho punto y el origen de coordenadas representa la función lineal dada por la fórmula

a) **y=3,5·x** b) **y= -2·x** c) **y = -0,5·x** d) **y=2·x**

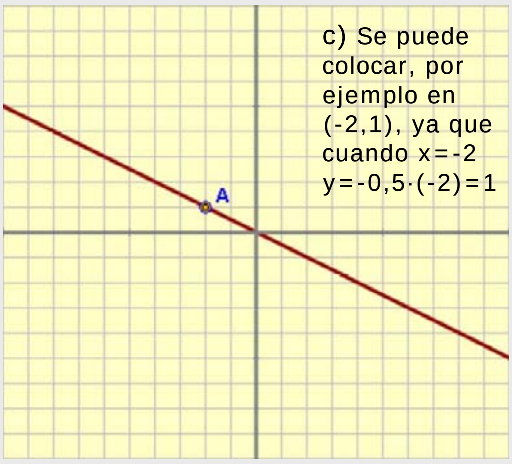




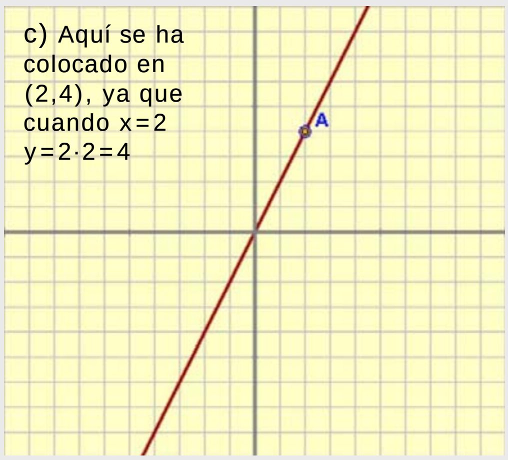
a) Se puede colocar, por ejemplo en (2,7), ya que cuando x=2 y=3,5·2=7



b) Se puede colocar, por ejemplo en (-2,4), ya que cuando x=-2 y=-2·(-2)=4



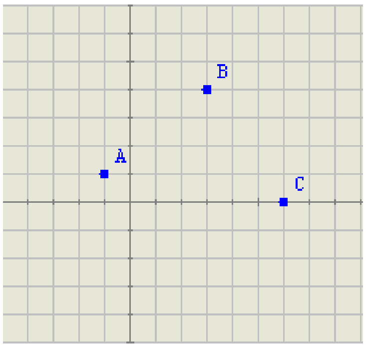
c) Se puede colocar, por ejemplo en (-2,1), ya que cuando x=-2 y=-0,5·(-2)=1



c) Aquí se ha colocado en (2,4), ya que cuando x=2 y=2·2=4

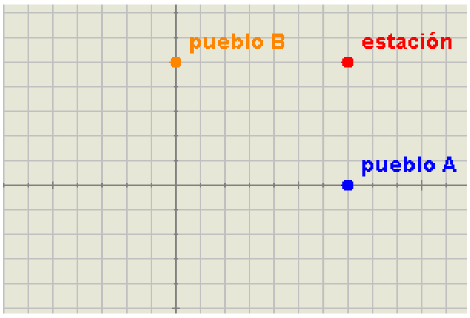
Para practicar

1. En una hoja de papel cuadriculado se habían marcado los cuatro vértices de un cuadrado, pero uno de ellos se ha borrado. Con la ayuda de las coordenadas indica dónde debe marcarse el vértice que falta.

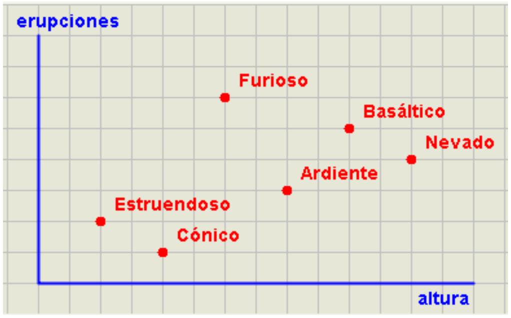


2. Un grupo de amigos se ha ido de excursión. Uno de ellos ha realizado un pequeño croquis con la ayuda de un sistema de ejes coordenados. ¿Cuáles son las coordenadas de la ermita?

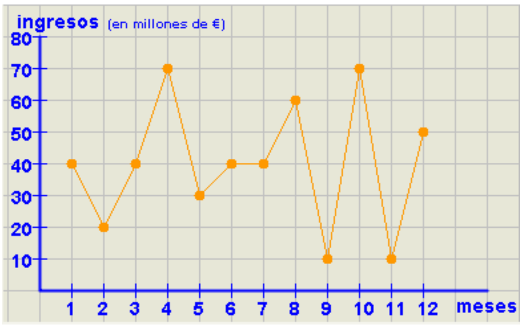
3. Dos pueblos cercanos comparten la misma estación de ferrocarril. ¿Cuál es la situación geográfica de dicha estación respecto a ambos pueblos si un lado de cada cuadrícula representa 500 m en la realidad.



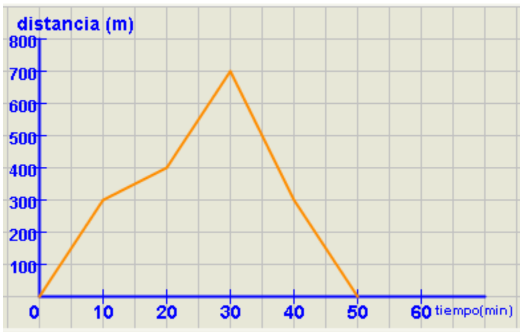
4. Escribe, a partir de los datos de la gráfica, el nombre del volcán más alto y el nombre del volcán que ha sufrido más erupciones.



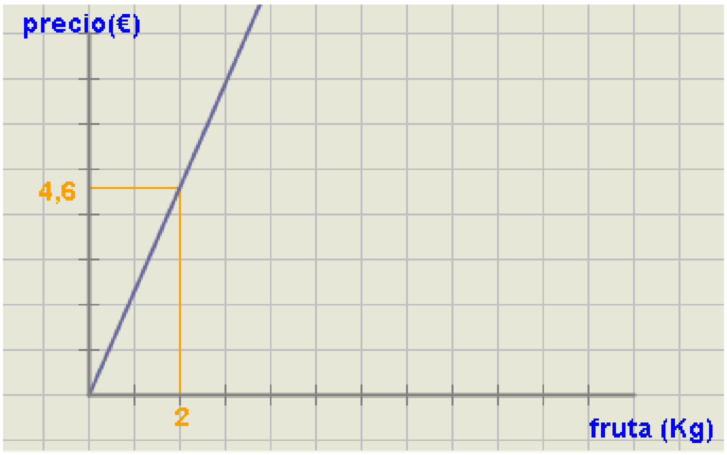
5. Una empresa presenta el gráfico que se ve a continuación, con los ingresos obtenidos durante los doce meses.del último año ¿Cuál es el primer mes en que más ganó? ¿Y el último mes en que gano menos? ¿Qué ingresos obtuvo en mayo?



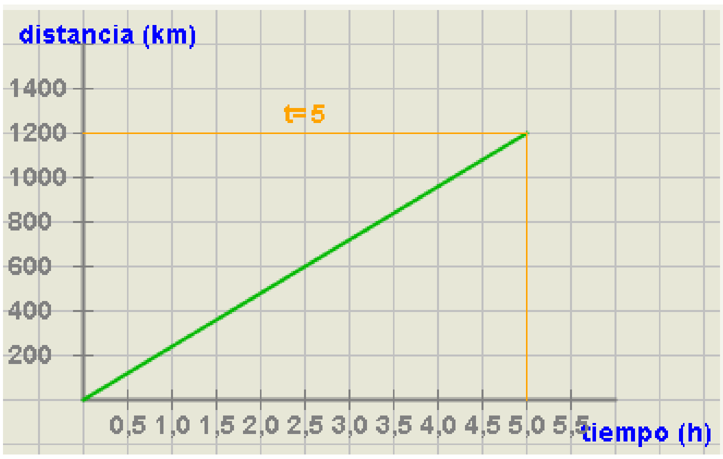
6. Marta ha salido a dar un paseo. ¿Cuánto ha durado ese paseo? ¿A qué distancia se encuentra el punto más alejado de su casa?



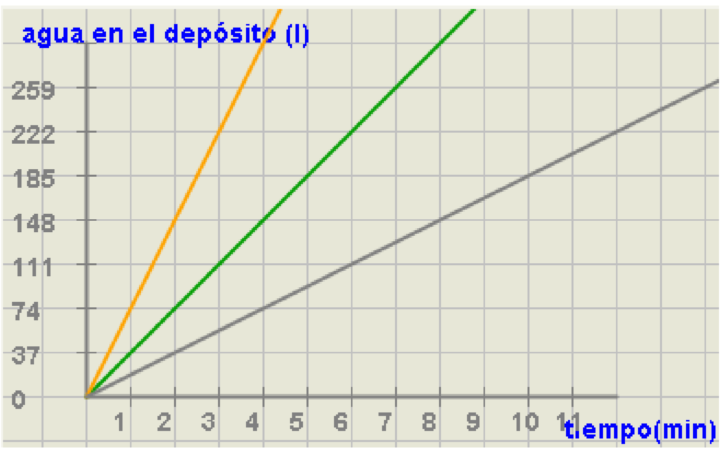
7. Con los datos de la gráfica calcula a cuánto se ha vendido el kilo de fruta.



8. Un tren de largo recorrido une las ciudades de Málaga y Barcelona y ha iniciado el viaje a las 8 de la mañana. La siguiente gráfica muestra el recorrido realizado en función del tiempo y la distancia recorrida ¿A qué hora llega a Barcelona?¿Cuál fue la velocidad media del tren?



9. Un depósito se llena mediante una bomba que vierte 74 litros de agua por minuto. ¿Cuál de las tres rectas representa el agua del depósito en función del tiempo?

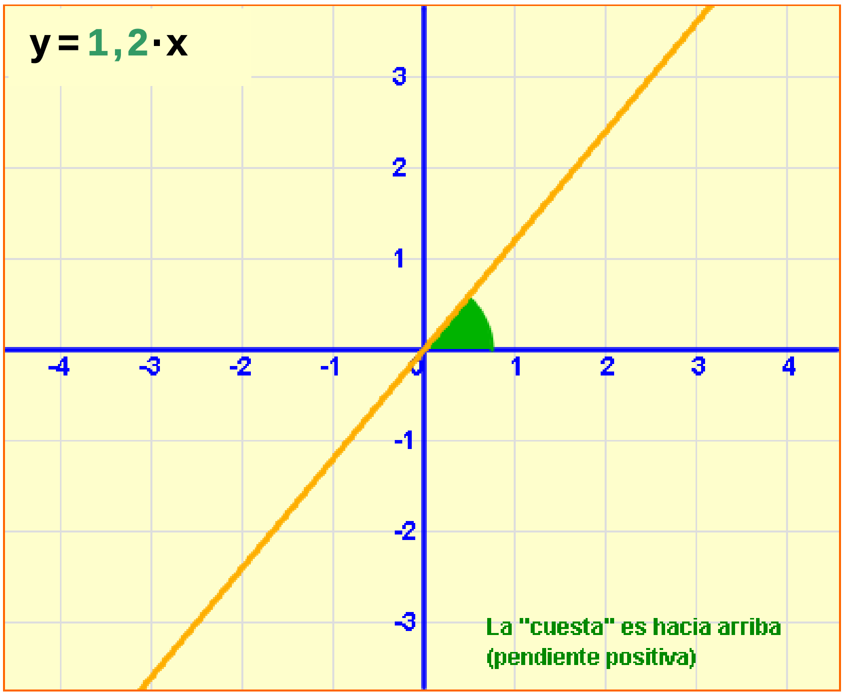


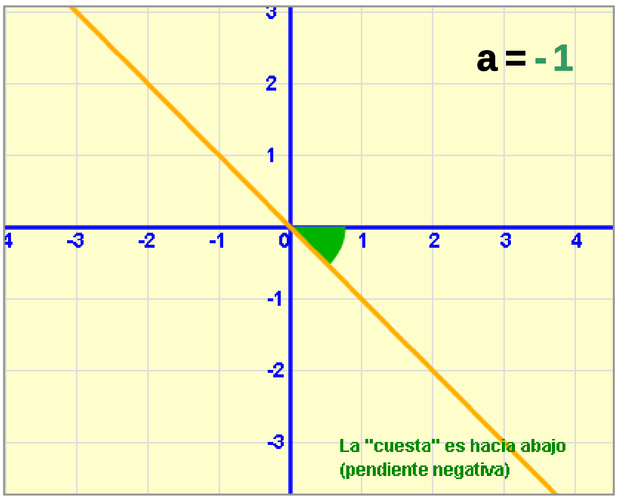
Para saber más

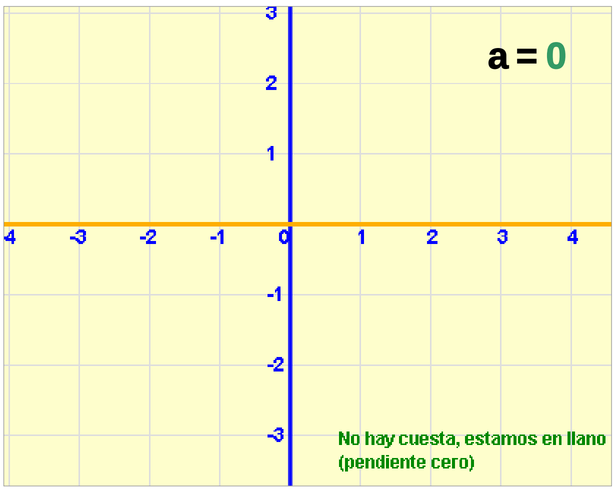
La pendiente de una recta

Ya has visto que la **ecuación** de una **función lineal** es de la forma **y=a·x** El valor de **a** , que es la **constante de proporcionalidad**, también recibe el nombre de **pendiente** puesto que nos indica el ángulo de la recta con respecto a la parte positiva del eje de las **X** .

En las imágenes puedes ver rectas con el valor de **a** igual a 1,2; 0 y -1. Observa las distintas inclinaciones de las rectas que se ven.

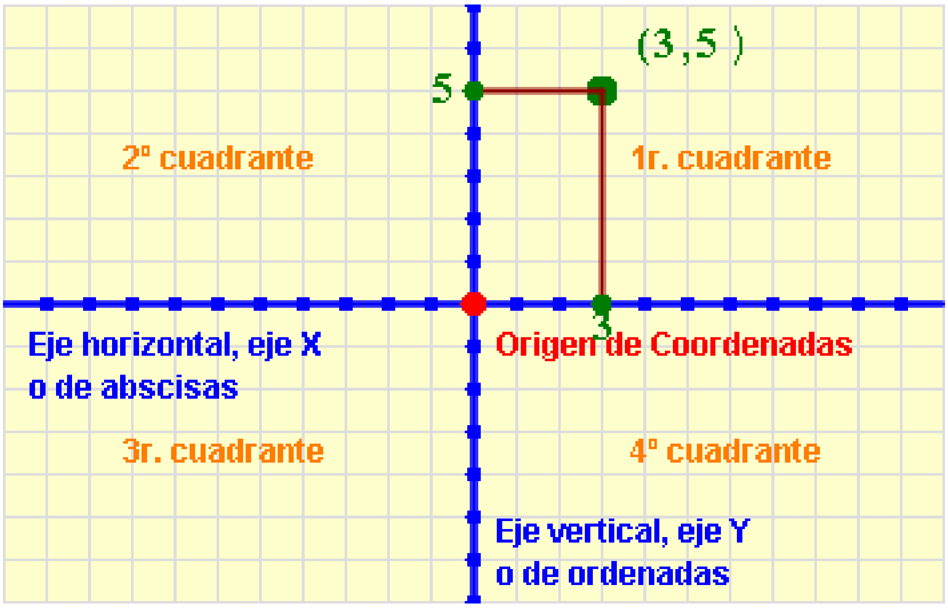




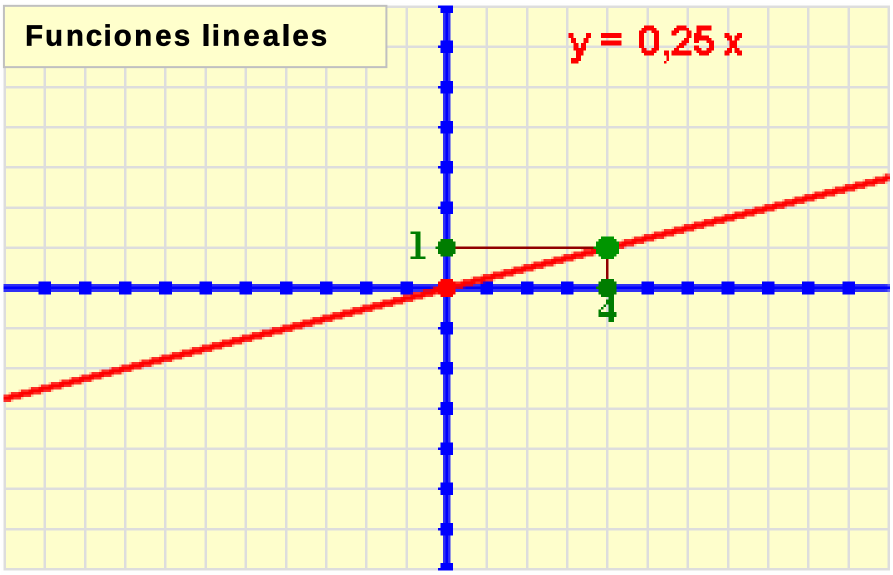


Recuerda lo más importante

- Un sistema de representación **cartesiano** está formado por dos rectas o ejes perpendiculares, el de **abscisas** (eje **x**) y el de **ordenadas** (eje **y**). El punto en el que se cortan los ejes es el **origen** de coordenadas.
- Cada **punto** en el plano se representa mediante un par ordenado de **coordenadas** cartesianas **(x,y)**.

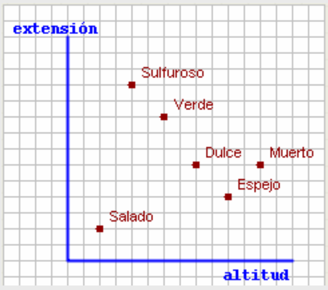


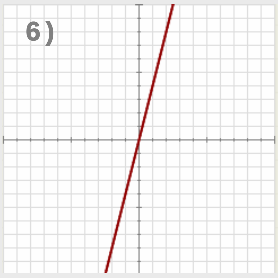
- La representación gráfica de la relación existente entre dos magnitudes directamente proporcionales es o bien una recta o bien un conjunto de puntos alineados.
- Todas las gráficas anteriores **siempre pasan por el origen** de coordenadas, es decir por el punto (0,0). Corresponden a las llamadas **funciones lineales**.



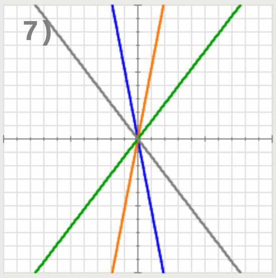
Autoevaluación

4)

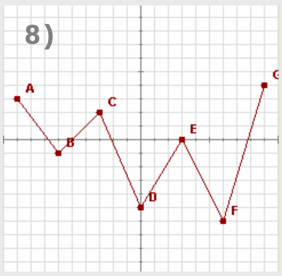




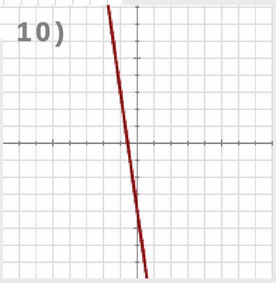
x	y
-4	-16
-2	-8
1	4
2	8
4	16
¿?	20
-3	¿?



x	y
-3	-15,75
-2	-10,5
-1	-5,25
0	0
1	5,25
2	10,5
3	15,75

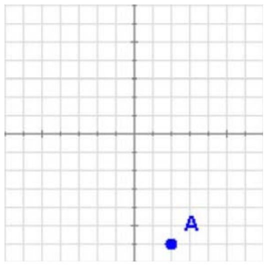


x	y
-9	3
-6	-1
-3	2
0	-7
3	0
6	-6
9	4



1. ¿Cómo se llama el eje vertical de un sistema de ejes coordenados?

2. ¿Qué coordenadas corresponde al punto A representado en la gráfica?



3. Representa el punto de coordenadas B(3,-5) en el sistema de ejes coordenado del ejercicio anterior.

4. Indica el lago de mayor extensión y el lago que se encuentra a mayor altura.

5. Completa la tabla sabiendo que la cantidad de disolvente que debemos usar por kilo de pintura viene determinada por la ecuación: **disolvente=0,55 · kg de pintura+0,2**.

Kg. pintura	1	2	4	
disolvente	0,75			5,7

6. Completa los datos de la tabla que corresponde a la gráfica que se muestra.

7. Indica el color de la gráfica que corresponde a la tabla dada.

8. Uno de los puntos representados es incorrecto. Indica sus coordenadas.

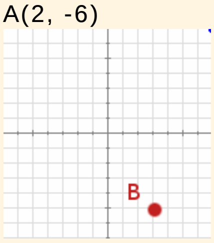
9. Calcula la constante de proporcionalidad determinada por la función lineal representada.

10. ¿Qué tipo de función es la representada en la gráfica?.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. D(2,-3)
2. (1,-6)
3. 2.500 metros al norte de A y a 3.500 metros al este de B.
4. El volcán más alto es el Nevado y el volcán con más erupciones es el Furioso.
5. abril (70 millones), noviembre (10 millones), 30 millones.
6. El paseo ha durado 50 minutos y la distancia al punto más alejado es de 700 metros
7. 2,3 € el kilo
8. El tren llega a la una de la tarde a Barcelona y la velocidad media del tren es de 240 km/h
9. La recta naranja.

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. Eje de ordenadas
2. A(2, -6)
3. 

4. el lago más extenso: Sulfuroso, el lago más elevado: Muerto
5. x=2 y=1,3; x=4 y=2,4; x=5,7 y=10
6. x=5, y=-12
7. la recta naranja
8. D(0,-5) que debería ser (0,-7)
9. m=3
10. función afín

No olvides enviar las actividades al tutor

12

Estadística y Probabilidad

Objetivos

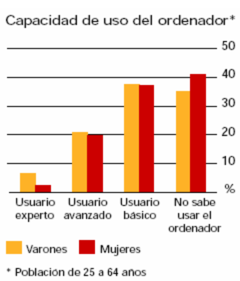
En esta quincena aprenderás a:

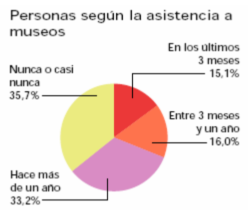
- Recoger datos para un estudio estadístico.
- Organizar los datos en tablas de frecuencia absoluta y relativa.
- Construir e interpretar diversos gráficos estadísticos. Diagramas de barras, líneas poligonales, diagramas de sectores.
- Distinguir sucesos de un experimento aleatorio. Conocer y utilizar las identidades notables.
- Calcular probabilidades sencillas.

Antes de empezar

Gráficos estadísticos

Muchas veces habrás visto gráficos similares a los siguientes, sacados del INE, Instituto Nacional de Estadística. En esta quincena aprenderás a interpretarlos.





1. Distribuciones estadísticas. Tablas de frecuencia.

Variable, población y muestra

Si queremos saber **cuánto caminan diariamente los alumnos de un instituto**, les preguntaremos a todos (muestra exhaustiva) o a algunos escogidos por cursos (muestra estratificada) o elegidos al azar (muestra aleatoria). **La población** son todos los alumnos del instituto, **la muestra** está formada por los alumnos encuestados y **la variable** es la distancia que camina cada alumno diariamente, que como se puede cuantificar diremos que es una **variable cuantitativa.**

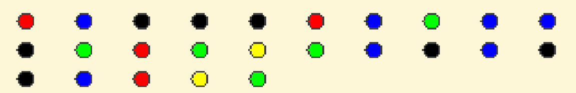
Cuando se pretende saber **cuál es el programa de TV favorito entre los miembros de una familia**, la población es esa familia y la **variable es cualitativa**, pues no se expresa con una cantidad numérica.

a) Preguntamos a los alumnos de un instituto cuánto caminan diariamente.

b) ¿Cuál es el programa favorito de la familia de Antonio?

Frecuencia absoluta y relativa

Color preferido | Estaturas en cm | Nº de calzado



Inicio

	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Tanto por uno o probabilidad
Rojo	4	4/25	0,16
Verde	5	5/25	0,2
Azul	7	7/25	0,28
Amarillo	2	2/25	0,08
Negro	7	7/25	0,28

En la imagen de la izquierda aparecen los datos recogidos en una encuesta, el recuento se expresa en las casillas de la primera columna, la frecuencia absoluta de un valor o tramo de la variable es el número de veces que aparece ese valor en los datos recogidos.
A continuación se escribe cada f. absoluta entre el número total de datos o tamaño de la muestra, N

$$\text{f. relativa} = \frac{\text{f. absoluta}}{\text{nº de datos}}$$

Porcentajes y ángulos

Color preferido | Estaturas en cm | Nº de calzado

36 40 36 36 40 38 36 40 40 38
37 36 38 39 37 37 40 36 36 39

Inicio

	Frecuencia relativa con 4 decimales.	Porcentaje % tanto por 100	Ángulo en grados
36	0,35	35 %	126 grados
37	0,15	15 %	54 grados
38	0,15	15 %	54 grados
39	0,1	10 %	36 grados
40	0,25	25 %	90 grados

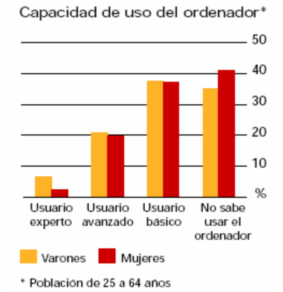
Si un valor aparece 6 veces en los 20 datos, su frecuencia relativa es 6/20=0,3 que es igual a 30/100 o 30% (fracciones equivalentes por 5), 30 es el porcentaje de ese valor. De la misma manera si consideramos que el total de datos representa los 360º grados de la circunferencia, ¿cuántos grados corresponderán a ese valor?
0,3·360 grados =108 grados

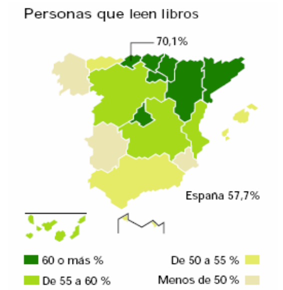
% = f. relativa · 100
Grados= = f. relativa · 360

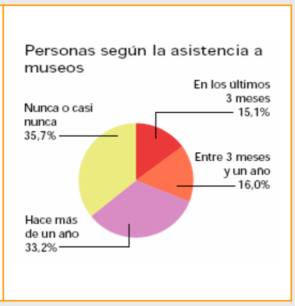
Observa que la suma total de la primera columna es 1, el total de los porcentajes es 100 y el total de la tercera columna de la escena es 360.

EJERCICIOS resueltos

1. Di cuales son la población y las variables de cada gráfico.







Soluciones

La población son los varones y mujeres de 25 a 64 años. La variable es la experiencia con el ordenador.	La población son los libros editados desde 1996 a 2007. La variable es el año de edición.	Se podría decir que la población, todos los españoles, se distribuyó por autonomías y dentro de cada autonomía se estudió la variable "¿Se leen libros?"	La población son los españoles. La variable el tiempo transcurrido desde su última visita a algún museo.

2. Completa cada una de las siguientes tablas

	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa o prob.
Rojo	2	
Verde	9	
Azul	9	
Total N		

	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa o prob.
[150, 160)		0,3
[160, 170)		0,45
[170, 180)		
Total N	20	

	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa o prob.
36	1	0,1
37	5	
38		
Total N		

Soluciones

	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa o prob.
Rojo	2	0.1
Verde	9	0.45
Azul	9	0.45
Total N	20	

	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa o prob.
[150, 160)	6	0,3
[160, 170)	9	0,45
[170, 180)	5	0.25
Total N	20	

	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa o prob.
36	1	0,1
37	5	0.5
38	4	0.4
Total N	10	

3. Completa las siguientes tablas de porcentajes y grados.

	Frecuencia absoluta	%	Ángulos en grados
Rojo	10		
Verde	18		
Azul	12		
Total N			

	Frecuencia absoluta	%	Ángulos en grados
[150, 160)		40	
[160, 170)		20	
[170, 180)			
Total N	10		

	Frecuencia absoluta	%	Ángulos en grados
36			72
37			144
38			
Total N	20		

Soluciones

	Frecuencia absoluta	%	Ángulos en grados
Rojo	10	25	90
Verde	18	45	162
Azul	12	30	108
Total N	40		

	Frecuencia absoluta	%	Ángulos en grados
[150, 160)	4	40	144
[160, 170)	2	20	72
[170, 180)	4	40	144
Total N	10		

	Frecuencia absoluta	%	Ángulos en grados
36	4	20	72
37	8	40	144
38	8	40	144
Total N	20		

2. Gráficos estadísticos

Diagrama de barras

Fíjate atentamente en el cuadro de la derecha, al hacer el recuento de las estaturas se obtiene el diagrama de barras. La altura de cada barra es la frecuencia absoluta del dato que representa.

El gráfico indica fácilmente a primer golpe de vista cuál es el tramo de altura que más se da entre los 30 alumnos.

La altura de cada barra también se podría haber definido con las frecuencias relativas o con los porcentajes, el gráfico sería similar.

Otro gráfico que se ve a menudo es la línea que une los centros de la parte superior de las columnas o línea poligonal.

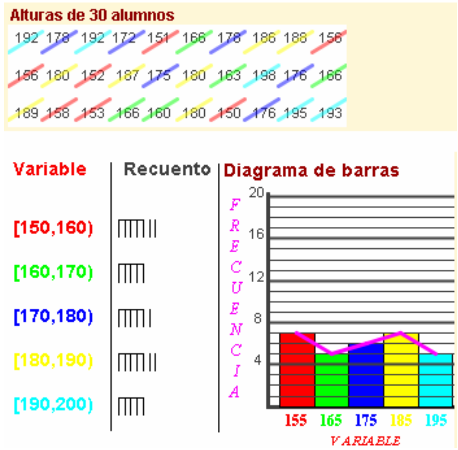


Diagrama de sectores

Muchas veces habrás visto un gráfico como el de la derecha, gráfico de sectores, el ángulo central que ocupa un sector mide en grados,

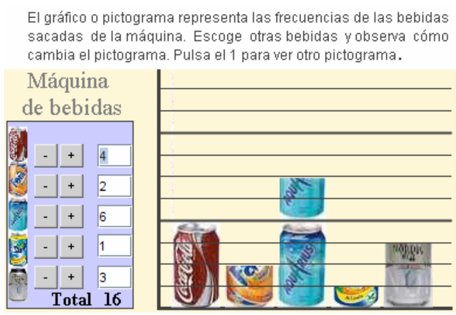
> 360·frecuencia/nº de datos

Las áreas de los sectores son directamente proporcionales a las frecuencias del valor de la variable que representan.

Pictogramas

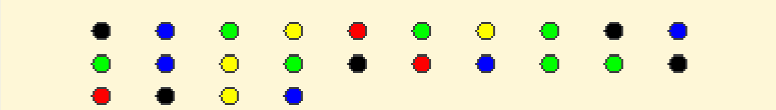
La escena presenta un pictograma sobre las bebidas escogidas en una máquina.

Un pictograma es un tipo de gráfico, que en lugar de barras, utiliza una figura proporcional a la frecuencia. Generalmente se emplea para representar variables cualitativas.



EJERCICIOS resueltos

4. Halla el diagrama de barras de los datos:



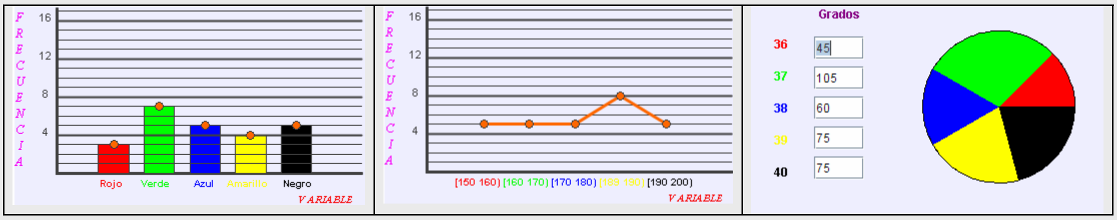
Agrupa las estaturas en intervalos de longitud 10 cm, desde 150 a 200. Dibuja la Línea poligonal.

196	152	194	189	151	170	189	169	171	181
174	152	194	167	181	171	165	194	176	190
182	169	154	186	184	153	163	186		

Dibuja el diagrama de sectores de los siguientes datos obtenidos al preguntar sobre el número de calzado en una encuesta.

40	40	39	37	39	37	38	38	40	37
37	37	39	36	37	40	39	38	37	36
36	38	39	40						

Soluciones



5. Observa el gráfico de barras y responde a las preguntas:

1. El porcentaje de nacimientos de madre extranjera, ¿ aumenta o disminuye con paso de los años?
2. ¿Cuál es el porcentaje de nacimientos de madre española en el 2002? ¿Y el de madre extranjera ese mismo año?

Soluciones

1. El porcentaje de nacimientos de madre extranjera es cada vez mayor.
2. En el 2002 el 90% de los nacimientos fueron de madre española y el 10% de madre extranjera.

6. Mira con atención este pictograma

Escribe en tu cuaderno un resumen de los datos que nos aporta este pictograma.

Solución

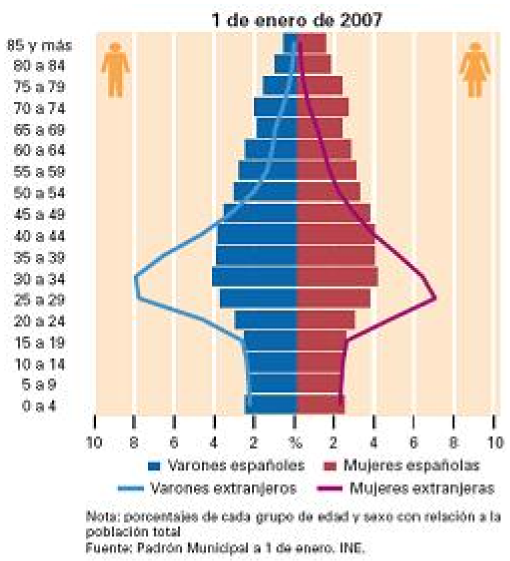
El pictograma nos indica que cada vez es mayor la recogida de envases de vidrio para reciclar.

En el 2001 se recogieron cerca de 500 Tm y en el 2005 unas 700 Tm.

Este no es un diagrama muy preciso.

EJERCICIOS resueltos

7. Responde a las preguntas sobre esta pirámide de población:

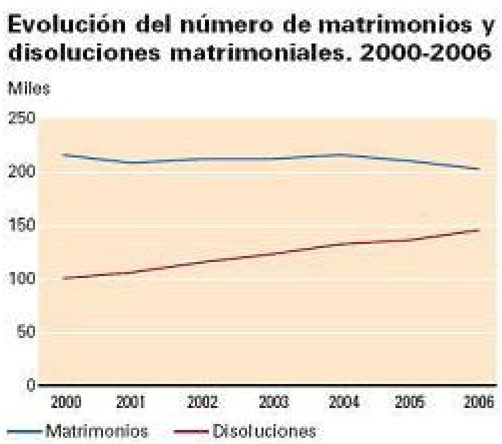


1. ¿Que tramo de edad tiene más varones extranjeros? ¿Y mujeres extranjeras?
2. Los varones y mujeres españolas son casi iguales en cada tramo hasta cierta edad ¿A partir de qué edad hay más mujeres que varones españoles?

Soluciones

1. El tramo con más varones extanjeros es de 30 a 34 años. El tramo con más mujeres extranjeras es de 25 a 29.
2. A partir de los 45 años ya se aprecia un aumento del número de mujeres sobre el de varones españoles, este aumento es bastante significativo a partir de los 75 años.

8. Desarrolla las siguientes expresiones

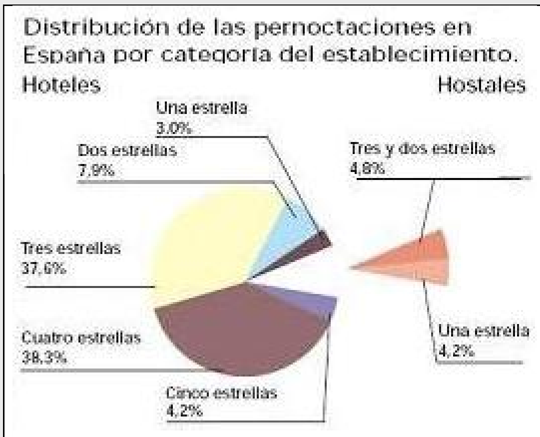


1. ¿Cuántos matrimonios hubo en el año 2006?
2. ¿Cuál fue el número de disoluciones ese mismo año?

Soluciones

1. En el 2006 hubo aproximadamente 200 mil matrimonios.
2. En el año 2006 hubo unas 150 mil disoluciones.

9. Halla la expresión en coeficientes de los siguientes productos



1. ¿En qué tipo de establecimiento hubo más pernoctaciones?
2. ¿Cuál fue el porcentaje de pernoctaciones en hostales?

Soluciones

1. El tipo de establecimiento con más pernoctaciones fue el de 4 estrellas.
2. Un 9% de las pernoctaciones fueron en hostales.

3. Experimentos aleatorios

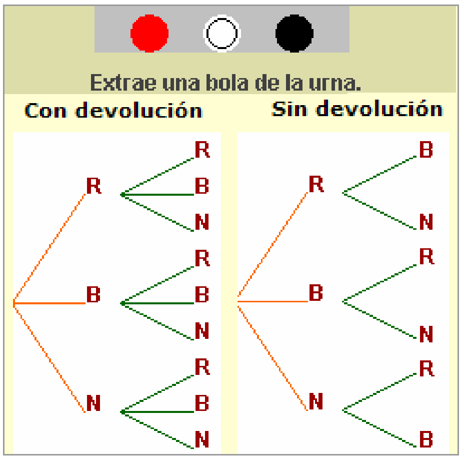
Sucesos. Espacio muestral

Al extraer una carta de una baraja, lanzar una moneda, tirar un dado, y en otros ejemplos análogos, no podemos saber de antemano el resultado que se va a obtener. Son experimentos **aleatorios**, aquellos en los que no se puede predecir el resultado y de ellos se trata aquí.

El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se llama **espacio muestral**, y cada uno de esos posibles resultados es un **suceso elemental**.

- Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral, se verifica cuando ocurre cualquiera de los sucesos elementales que lo forman.

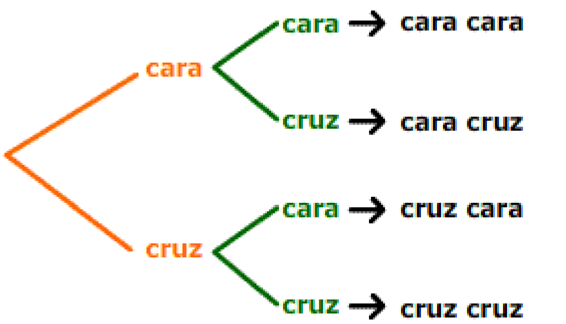
Hay un suceso que se verifica siempre, el **suceso seguro** que es el mismo espacio muestral.



Diagramas de árbol

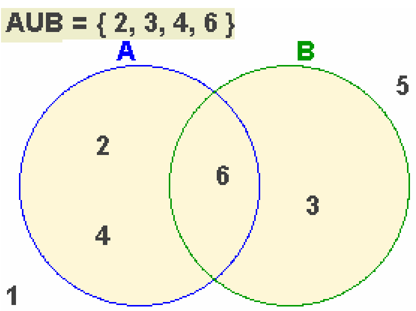
Si lanzamos un dado dos veces ¿cuál será el espacio muestral? ¿Y si se extraen bolas de una urna? En estos casos los diagramas de árbol nos ayudan a determinar los sucesos elementales.

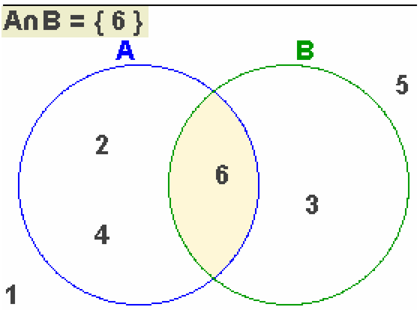
En el ejemplo calculamos los sucesos elementales que resultan al lanzar dos veces una moneda.



Cuatro sucesos elementales,

E={cara cara, cara cruz, cruz cara, cruz cruz}





Unión e Intersección de sucesos

La unión de sucesos equivale a la disyunción "o", es decir, si A es el suceso "sacar par" al tirar el dado y B es el suceso "sacar un múltiplo de 3",

A={2, 4, 6} B={3, 6}

el suceso unión, AUB, se verifica cuando ocurre A o B

AUB={2, 3, 4, 6}

La intersección equivale a la conjunción "y"

A ∩B={6}

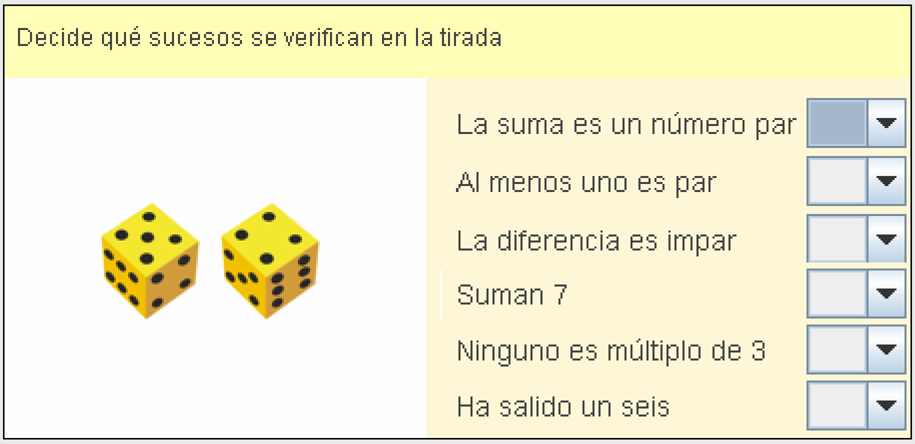
AUB significa A "o" B

A ∩B significa A "y" B

Observa que en este ejemplo A tiene 3 elementos; B, 2 ; A ∩B, uno y AUB consta de 4 elementos.

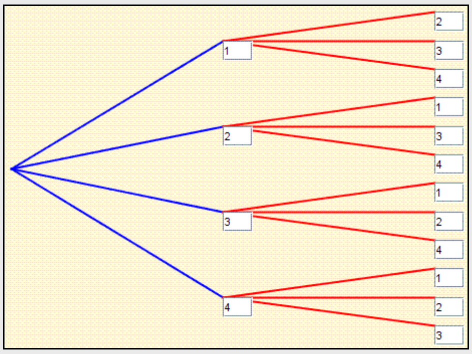
EJERCICIOS resueltos

10. Decide con un sí o un no si se verifican los sucesos indicados

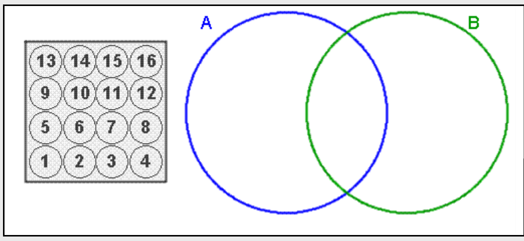


Solución: No, Sí, Sí, No, Sí, No.

11. Construye un árbol para deterrninar el espacio muestral de la extracción, sin devolución, de dos bolas de un urna que contiene cuatro.

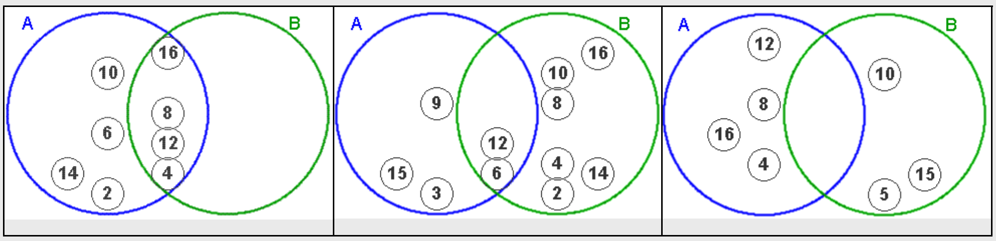


12. Construye los diagramas de Venn en cada caso.



1. A = múltiplos de 2 B = múltiplos de 4
2. A = múltiplos de 3 B = múltiplos de 2
3. A = múltiplos de 4 B = múltiplos de 5

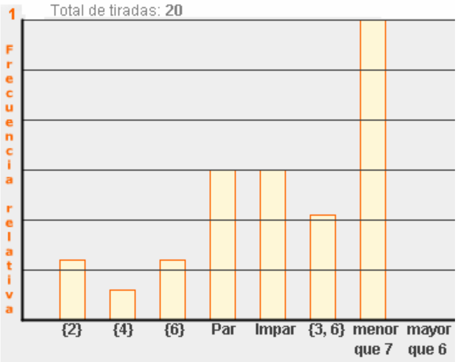
Soluciones



4. Probabilidad

	1	2	3	4	5	6
f	3	4	3	2	4	4
fr	0,15	0,2	0,15	0,1	0,2	0,2

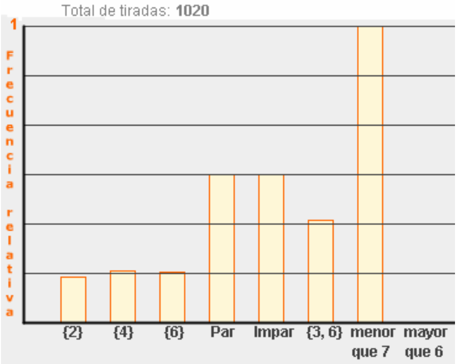
Total de tiradas: 20



20 tiradas

	1	2	3	4	5	6
f	160	156	180	180	171	173
fr	0,15	0,15	0,17	0,17	0,16	0,16

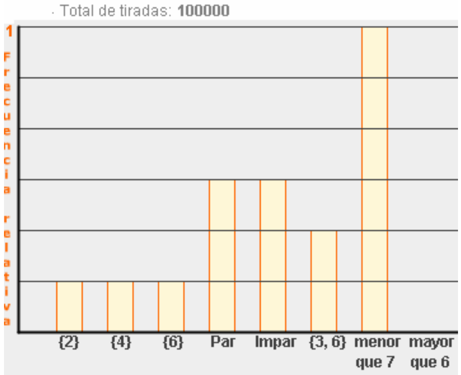
Total de tiradas: 1020



1020 tiradas

	1	2	3	4	5	6
f	16799	16770	16690	16562	16496	16683
fr	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16

Total de tiradas: 100000



100000 tiradas

Noción de probabilidad

Se dice que un suceso A es más probable que otro B si al realizar el experimento muchas veces, A ocurre significativamente más veces que B.

La secuencia de imágenes nos muestra la frecuencia relativa de algunos sucesos al tirar el dado 20, 1020 o 100000 veces.

Los posibles sucesos elementales al tirar el dado tienen prácticamente igual frecuencia relativa cuando realizamos más de 100000 tiradas. Las frecuencias relativas no varían significativamente al aumentar el número de tiradas después de realizar un gran número de ellas.

¿Estarías de acuerdo, a la vista de los resultados, en decir que la probabilidad de sacar un 2 es 1/6?

La probabilidad se mide entre 0 (probabilidad del suceso imposible) y 1 o 100% (probabilidad del suceso seguro).

La regla de Laplace

Cuando en un experimento aleatorio todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad, **equiprobables**, para calcular la probabilidad de un suceso cualquiera A, basta contar y hacer el cociente entre el nº de sucesos elementales que componen A (**casos favorables**) y el nº de sucesos elementales del espacio muestral (**casos posibles**)espacio.

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

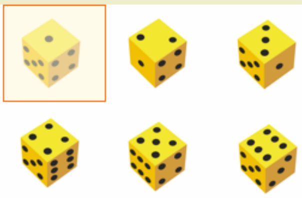
Este resultado se conoce como regla de Laplace. Recuerda que para poder aplicarla es necesario que todos los casos posibles sean igualmente probables.

EJERCICIOS resueltos

13.

			Solución
Experimento: Tirar una vez el dado. **Arrastra cada suceso a la franja correcta**		**Imposible**	**Imposible** Mayor que 6 Múltiplo de 7 Menor que 1
Múltiplo de 7	Menor que 8	**Muy poco probable**	**Muy poco probable**
		Poco probable	**Poco probable**
Mayor que 6	Menor que 7 y mayor que 1	**Probable al 50%**	**Probable al 50%**
		Bastante probable	**Bastante probable**
Menor que 1	Par o menor que 4	**Muy probable**	**Muy probable** Menor que 6 Menor que 7 y mayor que 1 Par o menor que 4
Par o Impar	Menor que 6	**Seguro**	**Seguro** Menor que 8 Par o Impar

14. Dados

Halla la probabilidad de sacar un uno al tirar un dado.	Halla la probabilidad de sacar al menos un uno al tirar dos dados.
En la imagen vemos que el nº de **casos posibles es 6**	En la imagen vemos que el nº de **casos posibles es 36**
	
Nº de casos favorables 1	**Nº de casos favorables** 11
Probabilidad del suceso 1/6	**Probabilidad del suceso** 11/36

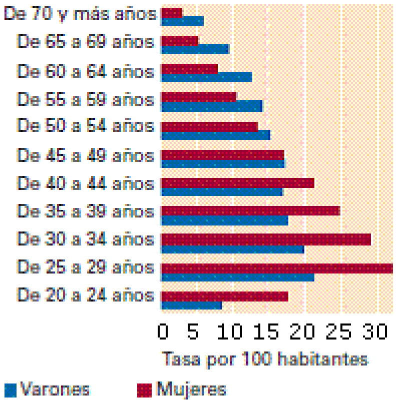
15. Monedas

Probabilidad de sacar al menos una cara al tirar dos monedas.	Probabilidad de sacar al menos dos caras al tirar tres monedas.
En la imagen vemos que el nº de **casos posibles es 4**	En la imagen vemos que el nº de **casos posibles es 8**
	
Nº de casos favorables 3	**Nº de casos favorables** 4
Probabilidad del suceso 3/4	**Probabilidad del suceso** 4/8

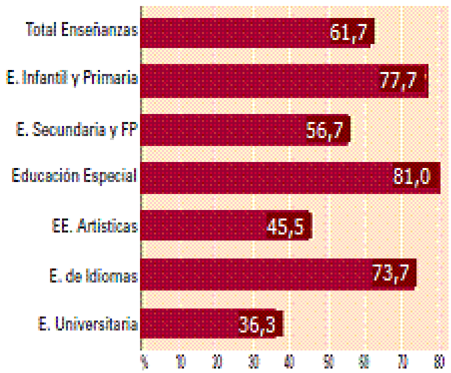
Para practicar

1. Describe la población y variable o variables de cada gráfico. Di de qué tipo son las variables ¿cuantitativas o cualitativas?

a) Población de 20 y más años con Estudios Universitarios. Año 2007

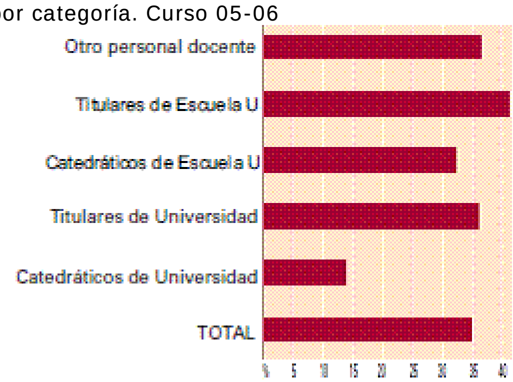


b) % de mujeres en el profesorado por enseñanza que imparten. Curso 05-06



Fuente: Las Cifras de la Educación en España. Avance Edición 2008. MEC.

c) % de mujeres en el profesorado universitario por categoría. Curso 05-06



Fuente: Estadística de la Enseñanza Universitaria en España. INE.

2. Haz un recuento de los datos (número de hermanos) en una tabla:

1 3 3 1 0 2 2 4 3 2 1 4 2 1 0

3. Haz un diagrama de sectores para los datos del color preferido que indica la tabla.

x	Rojo	Ve.	Azul	Am.	Tur	Total
f	2	1	3	4	5	15

4. Dibuja un diagrama de barras para los datos de la siguiente tabla.

x	Rojo	Ve.	Azul	Am.	Tur	Total
f	3	3	5	4	5	20

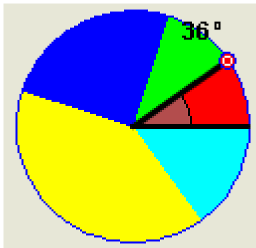
5. Completa la tabla con los porcentajes

x	Rojo	Ve.	Azul	Am.	Tur	Total
f	3	4	2	3	8	20
%						

6. Completa la tabla sabiendo que el porcentaje del "Rojo" es el 15%.

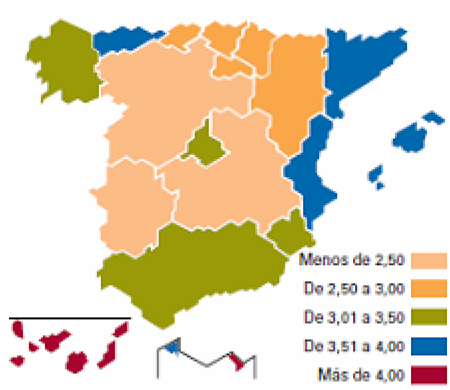
x	Rojo	Ve.	Azul	Am.	Tur	Total
f	3	2	5	7		

7. ¿Cuál es el % que corresponde al valor de la variable representado por el sector rojo?



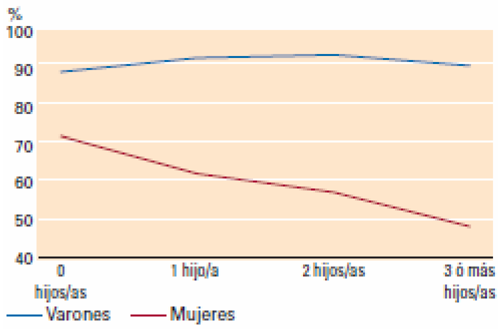
8. ¿Cuáles son las comunidades con mayor densidad de disoluciones matrimoniales por número de habitantes? El número de habitantes de Murcia en el 2006 es de 1370306, calcula el nº de disoluciones en Murcia en ese año.

Mapa 1.1. Disoluciones matrimoniales por 1.000 habitantes según comunidad autónoma. 2006



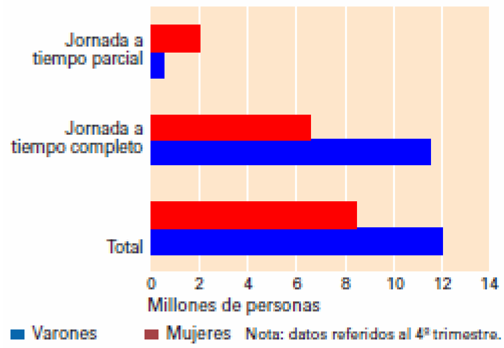
9. ¿Cuál es el % de hombres con 3 o más hijos que tiene trabajo? Calcula ese % en el caso de las mujeres. ¿Influye el nº de hijos en la tasas de ocupación de los varones? ¿Y en las mujeres?

Gráfico 3.10. Tasa de ocupación en función al número de hijos/as. 2006

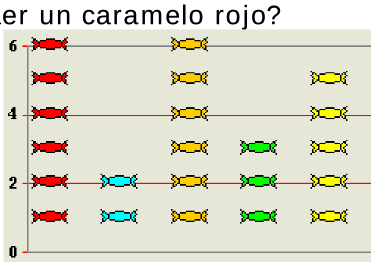


10. ¿Cuál es el total de la población ocupada en el cuarto trimestre del año 2007? ¿Cuántas personas trabajaban en ese periodo a tiempo parcial?

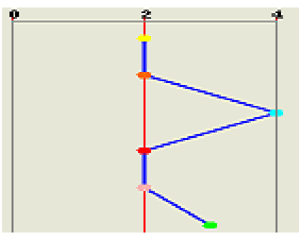
Gráfico 3.7. Población ocupada por jornada laboral y sexo. 2007



11. El nº de caramelos de cada color que hay en una bolsa se muestra en el gráfico ¿Cuál es la probabilidad de extraer un caramelo rojo?



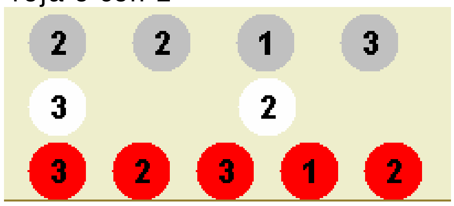
12. ¿Cuál es la probabilidad, según el gráfico, de sacar un dado verde de la bolsa?



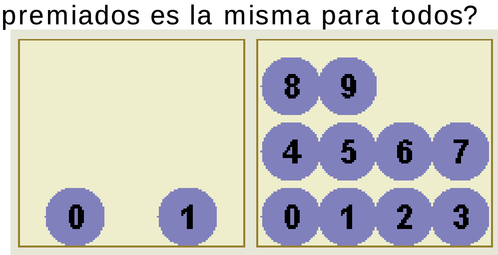
13. A={1, 5, 7, 8, 9} B={3, 4, 5, 8, 9}
Calcula AUB y A∩B

14. De una urna con cuatro bolas se extraen sucesivamente y con devolución dos bolas. Dibuja el diagrama de árbol y di cuál es el número de sucesos elementales. ¿Cuál es el número de sucesos elementales si la extracción es sin devolución?

15. Halla la probabilidad de que al extraer una bola de la urna del gráfico sea
a) una bola b) un 2 c) roja y con 2
d) roja o con 2



16. Entre 12 amigos se va a sortear un premio, para ello se reparten números del 0 al 11 y se extrae un número, la decena, de la urna izquierda y según la decena extraida, iremos a la urna dcha. o izda. para extraer las unidades ¿La probabilidad de ser premiados es la misma para todos?



¿Será el sorteo justo si se procede de la misma manera con 20 amigos y se reparten números del 0 al 19?

17. En el lanzamiento de un penalti se consideran los posibles sucesos: “gol” o “no marcar” ¿La probabilidad de gol es ½?

18. Al comienzo del partido con una moneda se decide cuál será la portería de cada equipo ¿La probabilidad de que al equipo A le toque la portería sur es ½?

19. Hallar la probabilidad de que al tirar tres dados la suma total sea 4. ¿Cuál es la probabilidad de suma 5?

Para saber más

Estadística Descriptiva, Estadística Inferencial

Pierre-Simon Laplace 1749 – 1827

Observar esta imagen, es equivalente a tomar una muestra de una población. En principio solo tienes en tu mente un conjunto de datos, que no te dicen nada. Sin embargo, si te alejas unos 3 metros y observas de nuevo la imagen, empezarás a extraer algo más de información, y posiblemente intuyas mejor lo que representa esta imagen. Habrás hecho una inferencia de los datos muestrales, para tener una imagen del conjunto. Este es el objeto de las técnicas de la **estadística** que la clasifican en estadística **descriptiva** e **inferencial**: Obtener muestras e inferir datos sobre la población

Imagen original

Control de calidad

¿Qué es la calidad? Evitar colas, ofrecer buenos productos... el control de calidad es una parte de la estadística.

Fue en Norteamérica, en los años 20, donde surgieron los pioneros de la aplicación de métodos estadísticos a la mejora de los procesos de producción.
¿Qué es la calidad?
Pongamos algunos ejemplos:

- A nadie le gusta que si compra un paquete de 1 Kg. de un producto, éste pueda pesar 950 gr.
- No nos dice nada que el tiempo medio en que una compañía de mensajeros entrega un paquete en una ciudad sea de 40 minutos, si el nuestro nos llega al cabo de 4 horas.
- En las oficinas bancarias, han suprimido las filas múltiples delante de las ventanillas, por la fila única. ¿Acaso se hizo por reducir el tiempo medio de espera de los clientes?. No, el tiempo medio no varía, pero de esta forma se trata de eliminar la variabilidad en los tiempos de espera.

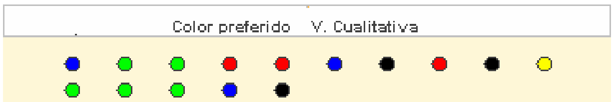
La homogeneidad de los resultados es normalmente la clave para la calidad. La estadística mide y estudia la dispersión de los resultados para procurar esta homogeneidad.

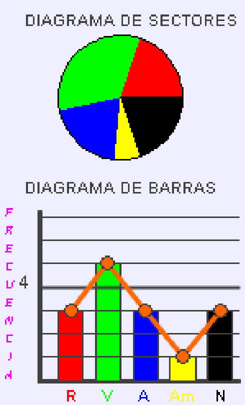
Extracto de la página http://www.isftic.mepsyd.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2001/estadistica/index2.htm

Antes de Laplace el libro de Cardano

A la muerte de Gerolamo Cardano (1501-1576) se encontró, entre sus manuscritos, el *Liber de Ludo Alae* (Libro de los juegos de azar) la primera obra dedicada íntegramente a la probabilidad. Fue publicada en 1663. En esta obra Cardano presenta una primera aproximación al concepto de probabilidad en términos de proporciones.

Recuerda lo más importante





	f. absoluta	f. relativa	grados
Rojo	3	0,2	72
Verde	5	0,33	120
Azul	3	0,2	72
Amarillo	1	0,06	24
Negro	3	0,2	72
	Total = 15		

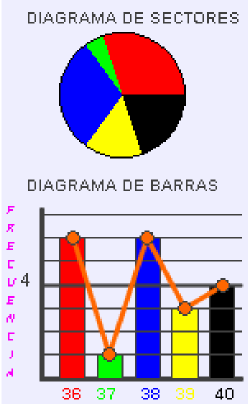
$$\text{frecuencia relativa} = \frac{\text{f. absoluta}}{\text{Total}}$$

$$\text{grados} = \text{frecuencia relativa} \cdot 360$$

Estadística

Debes saber realizar el recuento en variables cualitativas y cuantitativas, calcular la tabla de frecuencias y grados y construir los diagramas de sectores, barras o la línea poligonal.

Pulsa los botones superiores para ver otro ejemplo.

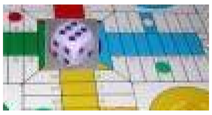


	f. absoluta	f. relativa	grados
36	6	0,3	108
37	1	0,05	18
38	6	0,3	108
39	3	0,15	54
40	4	0,2	72
	Total = 20		

	36	37	38	39	40
%	30	5	30	15	20

Probabilidad

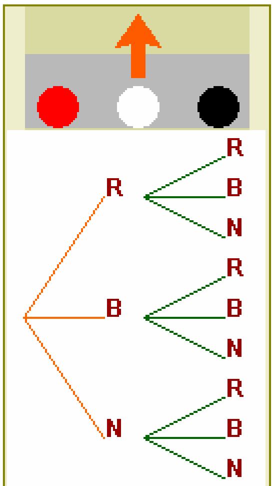
Experimento aleatorio



Calcular los casos posibles es hallar el espacio muestral, en algunos casos se construye con ayuda de un árbol.
La probabilidad de que se de el suceso A o B es la de la unión o AUB; la de que se den A y B es la de la intersección o A∩B

Sucesos elementales

Espacio muestral
{1, 2, 3, 4, 5, 6}

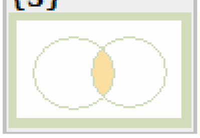


Árbol, extracciones con devolución

A={2, 4, 6}
B={3, 6}

AUB
{2, 4, 6, 3}

A∩B
{3}



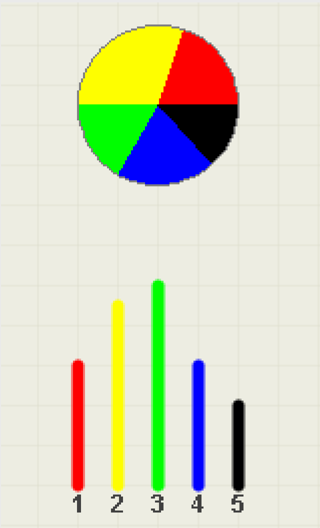
Recuerda que la probabilidad de Laplace solo se puede aplicar cuando los sucesos elementales son equiprobables.

REGLA DE LAPLACE

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

P(⚅) = 1/6

Autoevaluación



1. Halla la frecuencia con que aparece el número 3 en los resultados de esta encuesta sobre el número de hermanos: 5 2 1 1 3 2 2 3 4 4 5 3 1 1 4 3 4 1 4 1 1 4 1 1 5.

2. Si la frecuencia de un valor es 49 y su frecuencia relativa es 0,98, calcula el tamaño de la muestra o número total de datos.

3. Calcula los grados que le corresponden al sector de un diagrama que representa al 5 en la siguiente recogida de datos: 1 1 2 5 4 3 2 1 2 1 3 2 4 3 5 2 2 3 1 4 2 5 2 2 1 1 3 3 2 5 .

4. Frecuencia relativa de la variable a la que corresponde un sector de 72º.

5. Los dos diagramas de la derecha corresponden a los mismos datos, pero una barra está mal trazada ¿cuál?

6. ¿Cuántos sucesos elementales se presentan al extraer sucesivamente y con devolución 3 bolas de una urna con 6 bolas?

7. De una urna con los números del 1 al 50 se extrae uno. Si A es el suceso “sacar divisor de 14 ” y B, “ sacar divisor de 6”, ¿Cuántos sucesos elementales componen AUB?

8. De una urna con números del 1 al 29 se extrae uno. Si A es el suceso “sacar múltiplo de 5 ” y B, “ sacar múltiplo de 3”, ¿Cuántos sucesos elementales componen $A \cap B$?

9. Halla la probabilidad de que al extraer una carta de una baraja española sea un as.

10. En el partido del equipo A contra el B los posibles resultados son 1, x o 2. ¿Podemos decir que la probabilidad de 1 es 1/3?

Soluciones de los ejercicios para practicar

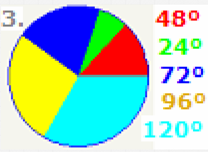
1.

	Población	Variables
a	Españoles mayores de 20 años en el 2007	Sexo, cualitativa Edad, cuantitativa E. universitarios, si o no, cualitativa
b	Profesores Univ. En España 05-06	Enseñanza que imparten, cualitativa Sexo, cualitativa
c	Como en b	Categoría del puesto Sexo, cualitativas

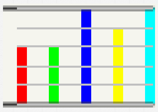
2.

x	0	1	2	3	4
f	2	4	4	3	2

3.



4.



5.

%	15	20	10	15	40

6. Total=20; turquesa→3 **7.** 10.

8. Ceuta y Melilla; de 4124 a 4796.

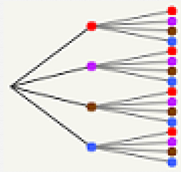
9. 90%; 50%; en hombres apenas influye, en mujeres sí.

10. 20200000; 2300000.

11. 12/22 = 6/11

12. 3/15 = 0,2

13. AUB = {1, 3, 5, 7, 8, 9};
A⋂B = {5, 8, 9}



14. 16; sin dev.→ 12.

15. a 5/11; b 5/11; c 2/11; d 8/11.

16. Si son 12, los del nº 10 y 11 tienen más probabilidad que el resto; si son 20 todos tienen la misma probabilidad.

17. No, los sucesos no son equiprobables.

18. Sí, sucesos equiprobables.

19. Suma 4→3/216; Suma 5→ 6/216.

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 4

2. 50

3. 48

4. 0,2

5. 3

6. 216

7. 6

8. 1

9. 0,1

10. No, no son equiprobables.

No olvides enviar las actividades al tutor